7.1. Differentialformen ♡ Schreiben Sie das Differential df folgender Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als Linearkombination von dx und dy und berechnen Sie $df(p_0)v$.

(a) $f(x,y) = y, \qquad p_0 = (3, \tfrac{1}{3}), \qquad v = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix},$

(b) $f(x,y) = (x-2y)^3, \qquad p_0 = (6,2), \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$

(c) $f(x,y) = \sin(2x) + \cos(3y), \qquad p_0 = (\pi, \tfrac{\pi}{2}), \qquad v = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$

7.2. Gradient ♡

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle $p_0 \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar mit Richtungsableitungen

$$df(p_0)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 6, \qquad df(p_0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1.$$

Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(p_0)$ an dieser Stelle.

(b) Im Punkt $(2, \pi, 2) \in \mathbb{R}^3$ auf dem Graphen der Funktion $f(x,y) = x^3 \sin(y) + x$ bildet sich ein Tautropfen. Nach einer Weile fliesst er durch die Schwerkraft angetrieben auf dem steilst möglichen Weg nach unten. In welche Richtung startet der Tropfen? Wie gross ist die Steigung des Graphen in diese Richtung?

7.3. Wegintegrale (schriftlich) △ Gegeben sind 1-Formen λ und Kurven γ im $\mathbb{R}^2$. Finden Sie je eine Parametrisierung der Kurven und berechnen Sie das Integral $\int_\gamma \lambda$.

(a) $\lambda = (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ und γ durchläuft die Parabel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y = x^2\}$ vom Punkt $(-1,1)$ zum Punkt $(1,1)$.

(b) $\lambda = xy^2\,dy$ und γ durchläuft den Halbkreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$ im Gegenuhrzeigersinn.

(c) $\lambda = (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$ und γ durchläuft das Dreieck mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ im Gegenuhrzeigersinn.

7.4. Vektorfelder △ Gegeben sind Vektorfelder $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und der Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (t^3, t^2+t, t)$ Bestimmen Sie falls möglich ein Potential zu den Vektorfeldern. Berechnen Sie das Integral $\int_\gamma v \cdot d\vec{s}$.

(a) $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 + 2yz \\ y^2 \end{pmatrix}$ **(b)** $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y+z \\ x+z \end{pmatrix}$