8.1. Minima und Maxima ♡ Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy.$$

Handelt es sich dabei um Minimalstellen, Maximalstellen oder Sattelpunkte?

8.2. Kritische Punkte ♡ Berechnen Sie alle kritischen Punkte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto xy^2 - \cos(x)$$

und bestimmen Sie, sofern die kritischen Punkte nicht entartet sind, deren Typ.

8.3. Taylor △ Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto e^x \sin(y).$$

(a) Man berechne die Taylorpolynome ersten und zweiten Grades von f um den Punkt $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$ und approximiere damit den Wert von f an der Stelle $(x_1, y_1) = (0, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4})$. Vergleichen Sie die Resultate mit dem tatsächlichen Funktionswert.

(b) Wie genau ist die lineare Approximation im Ball $B_{\frac{1}{4}}(0, \frac{\pi}{2})$? Berechnen Sie eine Schranke für den entstehenden Fehler.