9.1. Harmonische Funktion ♡ Sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Zu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ definiert. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = |x|^{2-n}$ falls $n > 2$, beziehungsweise $f(x) = \log(|x|^2)$ falls $n = 2$. Zeigen Sie: f ist harmonisch, d.h.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

9.2. Polarkoordinaten ♡ Gegeben seien die Abbildungen

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 & P\colon\ [0,\infty[\times [0,2\pi[&\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x^2 - y^2,\ 2xy), & (r,\varphi) &\mapsto (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi). \end{aligned}$$

P transformiert Polarkoordinaten (r,φ) zu kartesischen Koordinaten (x,y) im $\mathbb{R}^2$. Schreiben Sie die Funktion f via $h(r,\varphi) = (f \circ P)(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten und berechnen Sie die Jacobi-Matrix $dh(r,\varphi)$ mit Hilfe der Kettenregel. Bestätigen Sie das Ergebnis durch direkte Rechnung.

9.3. Kugelkoordinaten ◇ Die Transformation von Kugelkoordinaten zu kartesischen Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi\colon\ [0,\infty[\times [0,2\pi[\times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] &\to \mathbb{R}^3 \\ (r,\varphi,\theta) &\mapsto \big(r\cos\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\theta\big). \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von Φ sowie deren Determinante.

(b) Auf welches Gebiet muss Φ eingeschränkt werden, damit die Abbildung injektiv wird? Berechnen Sie die Umkehrtransformation und deren Definitionsgebiet.

(c) Malen Sie ein Bild zur Illustration.

9.4. Störungstheorie (schriftlich) ♡ Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^{xy}\sin(x^2 - y^2 + x) &= 0 \\ e^{x^2+y}\cos(x^2 + y^2) &= 1 \end{aligned}$$

besitzt die Lösung $(x,y) = (0,0)$. Beweisen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass das gestörte Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^{xy}\sin(x^2 - y^2 + x) &= \xi \\ e^{x^2+y}\cos(x^2 + y^2) &= 1 + \eta \end{aligned}$$

für alle Störungen (ξ,η) mit $\xi^2 + \eta^2 < \varepsilon^2$ eine Lösung $\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)$ besitzt, welche stetig von der Störung (ξ,η) abhängt.