10.1. Nicht-reguläre Lösungen ♡ Gegeben sei die Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$g(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2, \quad 2x^2+y^2\right).$$

Sind alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $g(x,y,z) = (1,1)$ reguläre Punkte von g?

10.2. Implizite Funktion ♡ Gegeben sei die Gleichung $2x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y = 0$.

(a) Zeigen Sie: Die Gleichung definiert implizit eine Funktion $y = \phi(x)$ mit $\phi(1) = 1$.

(b) Berechnen Sie $\phi'(1)$, ohne ϕ explizit zu kennen. *Hinweis:* Bemerkung 7.8.2.

(c) Finden Sie eine explizite Formel für ϕ und überprüfen Sie das Resultat für $\phi'(1)$.

10.3. Urbildmenge △ Die Abbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$g(x,y,z) = \left(x^3 - zx + y, \quad 2xyz\right).$$

(a) Man zeige, dass der Punkt $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ ein regulärer Punkt von g ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}$ von $x = 1$ und Funktionen $\varphi_1, \varphi_2\colon U \to \mathbb{R}$ existieren, sodass der Vektor $\gamma(x) = (x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$ für alle $x \in U$ ein Element der Urbildmenge $g^{-1}(\{(1,2)\}) = \{(x,y,z)\,;\; g(x,y,z) = (1,2)\}$ ist. Berechnen Sie ausserdem den Tangentialvektor $\dot\gamma(1)$, ohne γ explizit zu kennen.

(c) Sind alle Punkte der Menge $g^{-1}(\{(1,2)\})$ regulär?

10.4. Newton-Verfahren △ Mit dem Newton-Verfahren können Nullstellen einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ numerisch berechnet werden. Dabei wählt man zunächst einen Startwert x_0, von dem man vermutet, dass er in der Nähe einer Nullstelle liegt. Danach berechnet man iterativ Näherungen für die Nullstelle durch die Vorschrift

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

(a) Interpretieren Sie geometrisch, wie man x_{k+1} aus x_k erhält.

(b) Sei $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x - 3$. Berechnen Sie jeweils x_1, x_2, x_3, x_4 für die Startwerte $x_0 = -2$ beziehungsweise $x_0 = 1$.

(c) In der Vorlesung wurde der Beweis des Umkehrsatzes (Satz 7.7.1) mit dem *modifizierten Newton-Verfahren*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

motiviert. Führen Sie Teilaufgabe (b) mit dem modifizierten Newton-Verfahren aus. Was fällt auf?