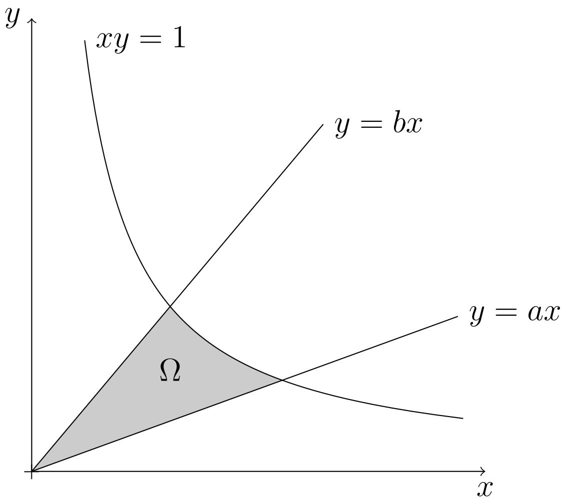
12.1. Gebiet ♡ Seien $b > a > 0$. Berechnen Sie das Integral von $f(x, y) = xy$ über folgendem Gebiet Ω.

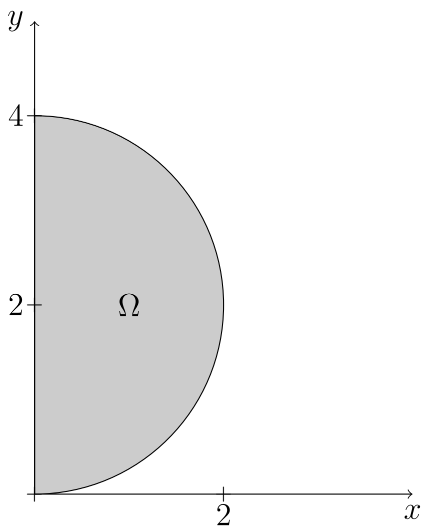


12.2. Iterierte Integrale ♡ Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Zeichnen Sie für folgendes Integral den Integrationsbereich im $\mathbb{R}^2$. Vertauschen Sie anschliessend die Integrationsreihenfolge und bestimmen Sie die neuen Grenzen.

$$\int_{-1}^{2} \int_{-x}^{2-x^2} f(x, y)\, dy\, dx$$

(b) Betrachten Sie das Gebiet Ω, schreiben Sie $\int_\Omega f\, d\mu$ als iterierte eindimensionale Integrale und vertauschen Sie anschliessend die Integrationsreihenfolge.



12.3. Satz von Green (schriftlich) $\diamond$ Berechnen Sie die gegebenen Integrale von 1-Formen zunächst als Wegintegrale und dann mit Hilfe des Green'schen Satzes.

(a) $\displaystyle\int_{\partial A}(x^2\,dx + y^2\,dy), \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ -\tfrac{\pi}{2} \le x \le \tfrac{\pi}{2},\ -1 \le y \le \cos x\right\}$

(b) $\displaystyle\int_{\partial B}(xy\,dx + e^x\,dy), \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1 - x\right\}$

12.4. Flächeninhalt $\triangle$ Berechnen Sie den Flächeninhalt des durch folgende Kurve begrenzten Gebiets.

$$\gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^2 = \sqrt{x^2+y^2} + x\right\}.$$

Hinweis 1. Formulieren Sie die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten, um sie anschliessend durch den Polarwinkel φ zu parametrisieren.

Hinweis 2. Wenden Sie den Satz von Green an mit $\operatorname{rot}(v) = 1$ für $v(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ 0 \end{pmatrix}$.