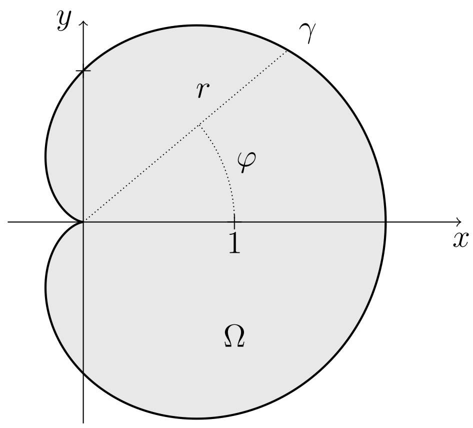
13.1. Substitution ♡ Berechnen Sie nochmals den Flächeninhalt des Gebiets Ω aus Aufgabe 12.4, diesmal jedoch ohne Anwendung des Satzes von Green, sondern mittels Transformation des Flächenintegrals in Polarkoordinaten.

$$\gamma = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2+y^2 = \sqrt{x^2+y^2}+x\Big\}.$$



13.2. Volumen ◇ Es sei $K = Z_1 \cap Z_2$ der Durchschnitt der beiden Zylinder

$$Z_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2 \le 1\}, \qquad Z_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ y^2+z^2 \le 1\}.$$

(a) Zeichnen Sie K.

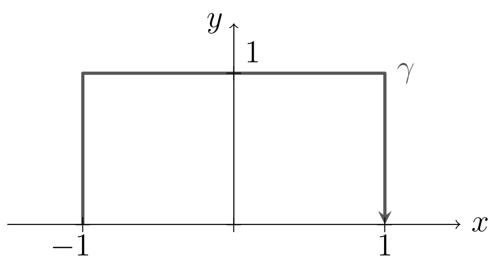
(b) Berechnen Sie das Volumen von K.

(c) Welche Masse hat K, wenn dessen Dichte durch die Funktion $\rho\colon K \to \mathbb{R}$ mit $\rho(x,y,z) = 1 + x^2 + z^2$ gegeben ist?

13.3. Linienintegral ♡ Gegeben sei der Streckenzug γ im $\mathbb{R}^2$ von $(-1,0)$ über $(-1,1)$ und $(1,1)$ nach $(1,0)$, sowie das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 4xy + 4y^2 \\ -2x^2 + 8xy + 12y^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Linienintegral $\int_\gamma v \cdot d\vec{s}$ auf irgendeine Weise.



13.4. Gauß ♡ Gegeben sei die Menge $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$ und das Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y + z \\ x + y + z \\ z + z^2 \end{pmatrix}$$

(a) Wenden Sie den Satz von Gauß an, um den Fluss des Vektorfelds v durch den Rand der Menge Z (von innen nach aussen) zu berechnen.

(b) Welcher Anteil des Flusses von v durch den Rand von Z geht durch die Zylindermantelfläche $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1\} \subset \partial Z$?

13.5. Stokes △ Gegeben sei die Kurve γ in nachstehender Figur und das Vektorfeld $w\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y + z \\ y - z + x \\ z - x + y \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Wegintegral $\displaystyle\int_\gamma w \cdot d\vec{s}$

(a) einmal direkt (*Hinweis.* Vektorfeld und Wegstücke sind symmetrisch bezüglich zyklischer Vertauschung $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z \rightsquigarrow x$) und

(b) einmal mit Hilfe des Satzes von Stokes und einer geeigneten Parameterdarstellung.

(c) Wie kann man den Wert des Flächenintegrals in (b) durch geometrische Einsicht direkt im Kopf ausrechnen?