1.1. Die Produktmetrik Wir müssen überprüfen, ob die Eigenschaften einer Metrik erfüllt sind. Die Symmetrie ist ganz klar. Für die Positive Definitheit bemerken wir, dass das Maximum zweier nichtnegativer Zahlen nicht negativ sein kann. Ferner gilt

$$\begin{aligned} d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 0 &\Leftrightarrow \max(d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)) = 0 \\ &\Leftrightarrow d_1(x_1,y_1) = 0,\ d_2(x_2,y_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2 \\ &\Leftrightarrow (x_1,x_2) = (y_1,y_2)\,. \end{aligned}$$

Sei $i \in \{1,2\}$, sodass

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2)\} = d_i(x_i,y_i)\,.$$

Es gilt auch für $i \in \{1,2\}$ und für $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

$$d_i(x_i,y_i) \le d_i(x_i,z_i) + d_i(z_i,y_i) \le d((x_1,x_2),(z_1,z_2)) + d((z_1,z_2),(y_1,y_2))$$

Beide Ungleichungen zusammen beweisen die Aussage. Wir sind fertig.

1.2. Partielle Ableitungen Es folgt direkt

i)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= y e^{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= x e^{xy} \end{aligned}$$

iii)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y x^{y-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} e^{y \ln x} = \ln x e^{y \ln x} = x^y \ln x$$

iv)

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)-(x-y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)-(x-y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

v)

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 2xy\sin(xy) + x^2y^2\cos(xy),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = x^2\sin(xy) + x^3y\cos(xy)$$

vi)

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) = y^2z^3,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z) = 2xyz^3,$$
$$\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z) = 3xy^2z^2$$

1.3. Stetigkeit Es gilt

$$\frac{|(x-1)(y-1)^3|}{(x-1)^2+|y-1|} \leq \frac{|x-1||y-1|^3}{|y-1|} = |x-1|(y-1)^2\,.$$

Sei $\epsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \min(\sqrt{\epsilon}, \sqrt[4]{\epsilon})$. Deshalb folgt für alle (x,y) mit

$$||(x,y)-(1,1)|| < \delta\,,$$

dass

$$|x-1|(y-1)^2 < \sqrt{\epsilon}\,\sqrt{\epsilon} = \epsilon$$

gilt, d.h. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} g(x,y) = 0$. Aber an der Stelle $(1,1)$ ist g gleich $-\pi$ und daher kann sie nicht stetig sein.