10.1. Der Zykloidenbogen

Es ist die Länge $L(\gamma)$ der Kurve

$$\begin{array}{rcl} \gamma \;:\; [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} at - a\sin t \\ a - a\cos t \end{pmatrix} \end{array}$$

zu bestimmen. Diese ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(a-a\cos t)^2 + (a\sin t)^2}\;\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\;\mathrm{d}t \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\;\mathrm{d}t \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\;\mathrm{d}t \;=\; a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\;\mathrm{d}t \\ &= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\;\mathrm{d}t \;=\; -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= -4a\cdot(-1) + 4a\cdot 1 \;=\; 8a\,. \end{aligned}$$

Die gesuchte Länge der Kurve γ ist also

$$L(\gamma) = 8a\,.$$

10.2. Linienintegrale

(a) Wir parametrisieren γ durch $\gamma(t) = (x(t), y(t))^t = (t, t^2)^t, t \in [-1,1] \Rightarrow \dot\gamma(t) = (1, 2t)^t$.
Dann ist das Integral vom Vektorfeld $\lambda(x,y) = (x+y, x-y)$ entlang γ nach Definition

$$\begin{aligned} \int_\gamma \lambda = \int_{-1}^1 \lambda(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt &= \int_{-1}^1 (x(t)+y(t), x(t)-y(t)) \cdot \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} dt \\ = \int_{-1}^1 (t+t^2)\cdot 1 + (t-t^2)\cdot 2t dt &= \int_{-1}^1 -2t^3 + 3t^2 + t dt = 2 \end{aligned}$$

(b) $\lambda(x,y) = (0, xy^2)$ auf $\mathbb{R}^2$. Wir parametrisieren den Halbkreis durch (t=Polarwinkel)

$$\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (2\cos t, 2\sin t).$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \lambda = \int_0^\pi \lambda(\gamma(t))\dot\gamma(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi (0, 8\sin^2 t\cos t)\begin{pmatrix}-2\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix}\mathrm{d}t = 16\int_0^\pi \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

Zum Berechnen des Integrals benutzen wir die Doppelwinkelformeln

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha), \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha).$$

Also ist der Integrand

$$\sin^2(t)\cos^2(t) = \frac{1}{4}\sin^2(2t) = \frac{1}{8}(1-\cos(4t))$$

und das Integral wird

$$\int_\gamma \lambda = 2\int_0^\pi 1 - \cos(4t)\mathrm{d}t = 2t - \tfrac{1}{2}\sin(4t)|_{t=0}^{t=\pi} = 2\pi$$

.

(c) Wir teilen den Weg in drei Teile auf (jeweils die Seiten des Dreiecks) und berechnen die einzelen Wegintegrale, die wir am Schluss dann addieren.

Von $(0,0) \to (1,0)$:
$\gamma_1(t) = \binom{t}{0}, \quad (0 \le t \le 1), \dot\gamma(t) = \binom{1}{0}$ und damit

$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int_0^1 (t^2, t^2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

Von $(1,0) \to (0,1)$:
$\gamma_2(t) = \binom{1-t}{t}, \quad (0 \le t \le 1), \dot\gamma(t) = \binom{-1}{1}$ daher:

$$\int_{\gamma_2} \lambda = \int_0^1 ((1-t)^2 + t^2, (1-t)^2 - t^2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}dt = \int_0^1 -2t^2 dt = -\frac{2}{3}.$$

Von $(0,1) \to (0,0)$:
$\gamma_3(t) = \binom{0}{1-t}, \quad (0 \le t \le 1) \quad \dot\gamma(t) = \binom{0}{-1}$ mit Integral

$$\int_{\gamma_3} \lambda = \int_0^1 \left((1-t)^2, -(1-t)^2\right)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} \lambda = \int_{\gamma_1}\lambda + \int_{\gamma_2}\lambda + \int_{\gamma_3}\lambda = 0.$$

10.3. Linienintegrale

Sei

$$\gamma: \; t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n \quad a \leq t \leq b$$

ein beliebiger Weg und $\mathbf{K}$ ein beliebiges Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$. Das *Arbeitsintegral* oder *Linienintegral* entlang dem Weg γ ist dann definiert als

$$\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} := \int_a^b \mathbf{K}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt\,.$$

(a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} &= \int_1^2 \begin{pmatrix} 3(t^2+1)\cdot 2t^2 \\ -5t^3 \\ 10(t^2+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_1^2 12t^5 + 12t^3 - 20t^4 + 30t^4 + 30t^2\, dt \\
&= \int_1^2 12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2\, dt \\
&= 2t^6 + 2t^5 + 3t^4 + 10t^3 \Big|_1^2 \\
&= 2^7 + 2^6 + 3\cdot 2^4 + 10 \cdot 2^3 - (2+2+3+10) \\
&= 303\,.
\end{aligned}$$

(b) Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t) \\ -2\sin^2(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&= -\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos(t) + 2\sin^2(t)\cos(t)\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} 3\sin^2(t)\cos(t)\, dt = -\sin^3(t)\Big|_0^{2\pi} = 0\,.
\end{aligned}$$

(c) Zuletzt berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^2(t) + t \\ -2\cos^2(t) + \sin(t) \\ e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\cos^2(t)\sin t - t\sin t - 2\cos^3(t) + \sin(t)\cos(t) + e^t\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} t\sin(t) + 2\cos^3(t)\, dt + \left(\frac{1}{3}\cos^3(t) - \frac{1}{2}\cos^2(t) + e^t\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= -\int_0^{2\pi} t\sin(t) + 2\cos^3(t)\, dt + e^{2\pi} - 1\,.
\end{aligned}$$

Es bleiben die Integrale $\int_0^{2\pi} t\sin(t)\,dt$ und $\int_0^{2\pi} 2\cos^3(t)\,dt$ zu berechnen. Es folgt mittels partieller Integration

$$\int_0^{2\pi} t\sin(t)\,dt = -t\cos(t)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos(t)\,dt = -2\pi\,.$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} 2\cos^3(t)\,dt &= 2\int_0^{2\pi}\Big(1-\sin^2(t)\Big)\cos(t)\,dt\\ &= 2\sin(t)\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\cos(t)\,dt = -2\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\cos(t)\,dt\\ &= -\frac{2}{3}\sin^3(t)\Big|_0^{2\pi} = 0\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_\gamma \mathbf{K}\cdot d\mathbf{x} = 2\pi + e^{2\pi} - 1\,.$$

10.4. Mehrfache Integrale

Das Volumen von $K_1\cap K_2$ ist

$$V(K_1\cap K_2) = V(N_1) + V(N_2)\,,$$

mit

$$N_1 = \Big\{(x,y,z) : 1\le z\le 3,\ \sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{-1+z}\Big\}$$

und

$$N_2 = \Big\{(x,y,z) : 3\le z\le 5,\ \sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{5-z}\Big\}\ .$$

Daher bekommt man

$$V(N_1) = \int_1^3\left(\int_{A_1(z)} dxdy\right)dz$$

und

$$V(N_2) = \int_3^5\left(\int_{A_2(z)} dxdy\right)dz\,,$$

mit

$$A_1(z) = \Big\{(x,y) : x^2+y^2\le -1+z\Big\}$$

und

$$A_2(z) = \Big\{(x,y) : x^2+y^2\le 5-z\Big\}\ .$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} V(N_1) &= \int_1^3 \pi(-1+z)\,dz \\ &= \pi\left[-z+\frac{z^2}{2}\right]_1^3 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} V(N_2) &= \int_3^5 \pi(5-z)\,dz \\ &= \pi\left[5z-\frac{z^2}{2}\right]_3^5 \\ &= 2\pi\,. \end{aligned}$$

Daher ist das Volumen von $K_1 \cap K_2$

$$V(K_1 \cap K_2) = 2\pi + 2\pi = 4\pi\,.$$