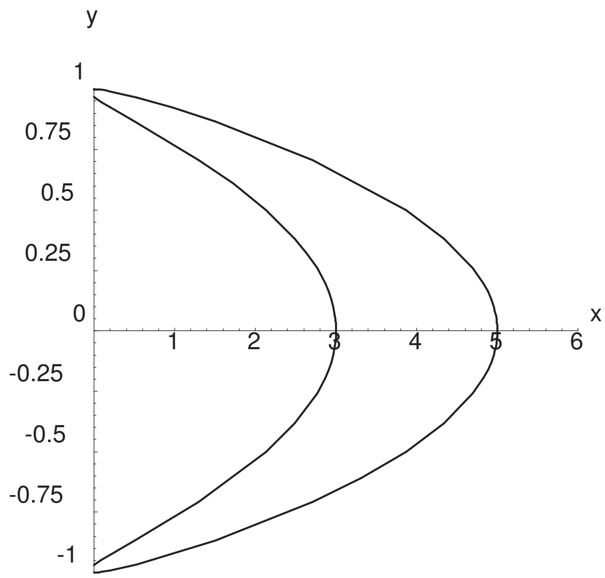
12.1. Satz von Green

Die Randkurve ∂B des, in untenstehender Figur dargestellten, Bumerangs B kann parametrisiert werden durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos^2(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [\,0, 2\pi).$$



Zur Berechnung des Flächeninhaltes von B betrachten wir das Vektorfeld

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{rot}\,(L) := \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} = 1.$$

Mit Hilfe des Satzes von Green erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Fläche}[B] &= \int_B d\mu = \int_B \mathrm{rot}(L)\, d\mu = \oint_{\partial B} L \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\partial B} x\, dy = \int_0^{2\pi} x(t)\, \dot{y}(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big[4\cos^2(t) + \cos(t) \Big] \cos(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = \pi. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen muss die y–Koordinate y_s des Schwerpunktes verschwinden und es bleibt die x–Koordinate x_s zu berechnen. Dazu betrachten wir das Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{rot}\,(K) = \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = x.$$

Mit Hilfe des Satzes von Green erhalten wir

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{\text{Fläche}[B]} \int_B x \, d\mu = \frac{1}{\text{Fläche}[B]} \int_B \operatorname{rot}(K) \, d\mu \\
&= \frac{1}{\text{Fläche}[B]} \oint_{\partial B} K \cdot d\mathbf{x} = \frac{1}{\pi} \oint_{\partial B} \frac{x^2}{2} \, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t) \, \dot{y}(t) \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big[4 \cos^2(t) + \cos(t) \Big]^2 \cos t \, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big[16 \cos^5(t) + 8 \cos^4(t) + \cos^3(t) \Big] \, dt = \frac{8}{2\pi} \frac{3\pi}{4} = 3.
\end{aligned}$$

Wobei wir uns den Hinweis in der Aufgabenstellung zu Nutze gemacht haben:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(t) \, dt = \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}(t) \, dt = 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Der Schwerpunkt des Bumerangs ist also

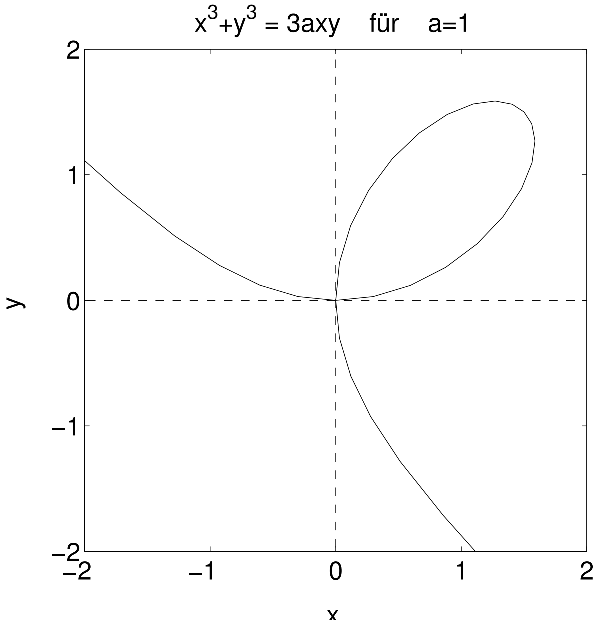
$$S_B = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

12.2. Satz von Green

Es sei $a > 0$ ein Parameter. Wir betrachten die Kurve, welche die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

ist.



Um die Randkurve des Kartesischen Blattes zu parametrisieren gehen wir wie folgt vor.
Falls $x \neq 0$ ist, wählen wir den Kurvenparameter so, dass gilt

$$y = xt\,.$$

Wir setzen dies in die Gleichung $x^3 + y^3 = 3axy$ ein und lösen nach x auf:

$$x^3 + y^3 = x^3 + t^3x^3 = 3ax^2t \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3at}{1+t^3}\,.$$

Falls $x = 0$ ist, ist $y = 0$ die einzige Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 = 3axy$.
Insgesamt erhalten wir die parametrisierte Kurve

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{3at}{1+t^3}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

In der Bemerkung weiter unten wird ausgeführt, dass der geschlossene Teil des Kartesischen Blattes genau die Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{3at}{1+t^3}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad t \in [0, +\infty)\,,$$

ist und, dass die Fläche links von der so parametrisierten Kurve liegt.

Zur Berechnung des Flächeninhaltes von B betrachten wir das Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \operatorname{rot}(K) = K_x^2 - K_y^1 = 1.$$

Mit Hilfe des Satzes von Green erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{Fläche}[B] &= \int_B d\mu = \int_B \operatorname{rot}(K)\, d\mu \overset{\text{Green}}{=} \oint_{\partial B} K \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\partial B} x\, dy = \int_0^\infty x(t)\, \dot{y}(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \frac{3at}{1+t^3} \cdot \frac{6at \cdot (1+t^3) - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}\, dt \\
&= 3a^2 \int_0^\infty \frac{6t^2 \cdot (1+t^3) - 3t^3 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^3}\, dt = 3a^2 \int_0^\infty \frac{2(1+t^3) - 3t^3}{(1+t^3)^3}\, 3t^2\, dt
\end{aligned}$$

Durch die Substitution $u := 1 + t^3 \;\Rightarrow\; du = 3t^2\, dt,\; u(0) = 1,\; \lim_{t\to\infty} u(t) = \infty$ folgt

$$\begin{aligned}
\text{Fläche}[B] &= 3a^2 \int_1^\infty \frac{2u - 3(u-1)}{u^3}\, du = 3a^2 \int_1^\infty \left[3u^{-3} - u^{-2}\right] du \\
&= 3a^2 \left[-\frac{3}{2}\, u^{-2} + u^{-1}\right]\Bigg|_1^\infty = 3a^2 \left[\frac{3}{2} - 1\right] = \frac{3}{2}\, a^2.
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des geschlossenen Teils des Kartesischen Blattes beträgt $\frac{3}{2}\, a^2$.

Bemerkung: Als Begründung, dass der geschlossene Bereich der Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3at}{1+t^3} \\ \frac{3at^2}{1+t^3} \end{pmatrix}, \qquad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

durch das Intervall $0 \leq t < +\infty$ parametrisiert wird, müssen wir den Verlauf der Kurve analysieren.

Bei $t = -1$ wird die Parametrisierung singulär: Für $t \to -1^-$ geht $x \to -\infty$, $y \to +\infty$, für $t \to -1^+$ geht $x \to +\infty$, $y \to -\infty$. Das Bild der Kurve geht in verschiedene Richtungen ins Unendliche. Interessant ist, dass die Summe

$$x + y = \frac{3at}{1+t^3} + \frac{3at^2}{1+t^3} = \frac{3at(1+t)}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{3at}{1-t+t^2} \overset{t\to-1}{\longrightarrow} -a$$

dabei beschränkt bleibt, das heisst die Kurve schmiegt sich asymptotisch an die Gerade $x + y = -a$ an.

Die Kurve $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ist in jedem Punkt $t \neq -1$ stetig, und auch für $t \to +\infty$ oder $t \to -\infty$ exitieren die Grenzwerte

$$\lim_{t\to\pm\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lim_{t\to\pm\infty} \begin{pmatrix} \frac{3at}{1+t^3} \\ \frac{3at^2}{1+t^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Damit der Abschnitt der Kurve $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [t_1, t_2]$, $t_1 \neq t_2$, geschlossen ist, müssen die Endpunkte die gleichen Bilder haben, das heisst $\begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_2) \\ y(t_2) \end{pmatrix}$.
Die Kurve kann sich auf keinem endlichen Teilintervall schliessen, denn für $x(t) \neq 0$ gilt stets $t = \frac{y(t)}{x(t)}$, woraus der Widerspruch $t_1 = t_2$ folgt. Ausserdem wird $x(t) = 0$ nur für einen endlichen Wert, $t = 0$, angenommen.

Im Unendlichen gilt jedoch auch $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{t\to\pm\infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$. Deshalb ist die Kurve auf dem Intervall $t \in [0, +\infty)$ geschlossen. Die Endpunkte werden beide auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abgebildet.
Das andere Intervall $t \in (-\infty, 0]$ ist nicht zulässig, weil die Kurve bei $t = -1$ nicht definiert ist und ins Unendliche geht.

Bleibt die Frage zu klären, warum das Innere der Schleife

$$t \in [0, +\infty) \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3at}{1+t^3} \\ \frac{3at^2}{1+t^3} \end{pmatrix}$$

links von der Kurve liegt, wie es für die Anwendung der Green–Formel notwendig ist.
Das liegt daran, dass für $t \neq 0$ die Gleichung

$$t = \frac{y(t)}{x(t)}$$

gilt, aus der folgt, dass t der Anstieg der Geraden ist, die die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ verbindet. Ausserdem gilt für $t \in [0, +\infty)$, dass $x(t), y(t) > 0$ ist.
Folglich liegt die Kurve im ersten Quadranten, beginnt für $t = 0$ im Ursprung und verläuft dann, wenn man mit t von 0 zu $+\infty$ läuft, so, dass der Anstieg ($= t$) des Vektors $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ständig wächst, bis am Ende für $x \to +\infty$ die Kurve wieder im Nullpunkt endet. Das kann nur sein, wenn das Innere des von der Kurve umschlossenen Gebietes links von der Kurve liegt.

12.3. Satz von Gauss

Es seien das Dreieck

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$K := \begin{pmatrix} 2xy - y^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Der Rand ∂B des Dreiecks B wird durch die drei Kurven

$$\gamma_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - t \end{pmatrix},\ \gamma_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{ und } \ \gamma_3 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 - t \\ t \end{pmatrix}$$

für $t \in [\,0, 1\,]$ parametrisiert, welche die Tangentialvektoren

$$\dot\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \dot\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \dot\gamma_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

haben, mit den Beträgen

$$\left|\dot\gamma_1\right| = \left|\dot\gamma_2\right| = 1 \ \text{ und } \ \left|\dot\gamma_3\right| = \sqrt{2}\,.$$

Des Weiteren benötigen wir die nach aussen weisenden Normalenvektorfelder

$$N_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } N_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Fluss des Vektorfeldes K durch den Rand ∂B des Dreiecks B von innen nach aussen ist das Flussintegral

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \oint_{\partial B} \Big\langle K, N \Big\rangle \, ds = \sum_{n=1}^{3} \int_{\gamma_n} \Big\langle K, N_n \Big\rangle \, d\gamma_n = \sum_{n=1}^{3} \int_0^1 \Big\langle K, N_n \Big\rangle \Big|\dot{\gamma}_n\Big| \, dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} -(1-t)^2 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle 1 \, dt + \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle 1 \, dt \\
&\quad + \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2(1-t)t - t^2 \\ (1-t)^2 + t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\rangle \sqrt{2} \, dt \\
&= \int_0^1 [\, 1-t \,]^2 dt - \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 \Big[2(1-t)t - t^2 + (1-t)^2 + t^2 \Big] \, dt \\
&= \int_0^1 \Big[(t-1)^2 - t^2 + (t-1)^2 - 2t(t-1) \Big] \, dt \\
&= \int_0^1 \Big[-t^2 - 2t + 2 \Big] \, dt = \Big[-\frac{t^3}{3} - t^2 + 2t \Big]_0^1 = \frac{2}{3} \, .
\end{aligned}
$$

(b) Die Divergenz von K ist

$$
\operatorname{div}(K) = K^1_x + K^2_y = 2y + 2y = 4y
$$

und mit Hilfe des Satzes von Gauss erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \oint_{\partial B} \Big\langle K, N \Big\rangle \, ds = \int_B \operatorname{div}(K) \, d\mu = \int_0^1 \int_0^{1-x} 4y \, dy \, dx \\
&= 4 \int_0^1 \frac{y^2}{2} \bigg|_0^{1-x} dx = 2 \int_0^1 [\, 1-x \,]^2 \, dx = -\frac{2}{3} \, [\, 1-x \,]^3 \bigg|_0^1 = \frac{2}{3} \, .
\end{aligned}
$$