13.1. Operationen auf Vektor- und Skalarfeldern

Wir setzen voraus, dass $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder im Raum sind, während $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Wir kürzen ausserdem ab: $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ etc.

(a) Durch Anwenden der Definition der Divergenz und der Produktregel für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fK) &= \partial_x(fK_1) + \partial_y(fK_2) + \partial_z(fK_3) \\
&= (\partial_x f) \cdot K_1 + f \cdot (\partial_x K_1) + (\partial_y f) \cdot K_2 + f \cdot (\partial_y K_2) + (\partial_z f) \cdot K_3 + f \cdot (\partial_z K_3) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} + f \cdot (\partial_x K_1 + \partial_y K_2 + \partial_z K_3) \\
&= \nabla f \cdot K + f \cdot \operatorname{div} K \,.
\end{aligned}$$

(b) Durch Anwenden der Definition der Divergenz und der Produktregel für die partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(K \times L) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} K_2L_3 - K_3L_2 \\ K_3L_1 - K_1L_3 \\ K_1L_2 - K_2L_1 \end{pmatrix}& \\
&= \partial_x(K_2L_3 - K_3L_2) + \partial_y(K_3L_1 - K_1L_3) + \partial_z(K_1L_2 - K_2L_1) \\
&= K_2\partial_x L_3 - K_3\partial_x L_2 + L_3\partial_x K_2 - L_2\partial_x K_3 + K_3\partial_y L_1 - K_1\partial_y L_3 \\
&\quad + L_1\partial_y K_3 - L_3\partial_y K_1 + K_1\partial_z L_2 - K_2\partial_z L_1 + L_2\partial_z K_1 - L_1\partial_z K_2 \\
&= -K_1(\partial_y L_3 - \partial_z L_2) + L_1(\partial_y K_3 - \partial_z K_2) - K_2(\partial_z L_1 - \partial_x L_3) \\
&\quad + L_2(\partial_z K_1 - \partial_x K_3) - K_3(\partial_x L_2 - \partial_y L_1) + L_3(\partial_x K_2 - \partial_y K_1) \\
&= -K \cdot \operatorname{rot} L + L \cdot \operatorname{rot} K \\
&= L \cdot \operatorname{rot} K - K \cdot \operatorname{rot} L \,.
\end{aligned}$$

(c) Durch Anwenden der Definition der Rotation und des Gradienten sowie der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y f_z - \partial_z f_y \\ \partial_z f_x - \partial_x f_z \\ \partial_x f_y - \partial_y f_x \end{pmatrix} = 0 \,.$$

(d) Durch Anwenden der Definitionen der Divergenz und der Rotation sowie der Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) &= \operatorname{div}\begin{pmatrix}\partial_y K_3 - \partial_z K_2\\ \partial_z K_1 - \partial_x K_3\\ \partial_x K_2 - \partial_y K_1\end{pmatrix}\\ &= \partial_x\partial_y K_3 - \partial_x\partial_z K_2 + \partial_y\partial_z K_1 - \partial_y\partial_x K_3 + \partial_z\partial_x K_2 - \partial_z\partial_y K_1 = 0\,.\end{aligned}$$

(e) Durch Anwenden der Resultate aus den Teilaufgaben a) und d) erhalten wir

$$\operatorname{div}(f\cdot\operatorname{rot} K) \overset{\text{a)}}{=} \operatorname{grad} f\cdot\operatorname{rot} K + f\cdot\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) \overset{\text{d)}}{=} \operatorname{grad} f\cdot\operatorname{rot} K\,.$$

13.2. Der Flächeninhalt

Ist $a<0$, so liefert $|a|$ anstelle von a dasselbe Ergebnis, da die Fläche lediglich der Spiegelung $(x,y,z)\mapsto(-x,y,z)$ unterworfen wird. Wir können also der Einfachheit halber $a>0$ annehmen. Die Hemisphäre vom Radius a parametrisieren wir in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \mathbf{r}(r,\phi) = \begin{pmatrix}r\cos\phi\\ r\sin\phi\\ \sqrt{a^2-r^2}\end{pmatrix} \qquad \text{für } 0<r\le a \text{ und } -\pi\le\phi<\pi.$$

Das (skalare) Flächenelement dieser Parametrisierung lautet:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}\right| \mathrm{d}\mu(r,\phi)\\ &= \left|\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ -\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\phi\\ r\cos\phi\\ 0\end{pmatrix}\right| \mathrm{d}\mu(r,\phi)\\ &= \left|\begin{pmatrix}\frac{r^2\cos\phi}{\sqrt{a^2-r^2}}\\ \frac{r^2\sin\phi}{\sqrt{a^2-r^2}}\\ r\end{pmatrix}\right| \mathrm{d}\mu(r,\phi)\\ &= \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}\mu(r,\phi)\,.\end{aligned}$$

Nun liegt $\mathbf{r}(r,\phi)$ im fraglichen Zylinder genau dann, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
& \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2 &\le& \frac{a^2}{4} \\
\iff\quad & x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2 &\le& \frac{a^2}{4} \\
\iff\quad & x^2+y^2 &\le& ax \\
\iff\quad & r^2 &\le& ar\cos\phi \\
\iff\quad & r &\le& a\cos\phi\,.
\end{aligned}$$

Diese Bedingung kommt also zu den bereits genannten Bedingungen $0<r\le a$ und $-\pi\le\phi<\pi$ hinzu. Sie kann aber nur gelten, wenn $\cos\phi\ge 0$ ist, d. h., wenn gilt $-\frac{\pi}{2}\le\phi\le\frac{\pi}{2}$. Andererseits ist sowieso $a\cos\phi\le a$. Der fragliche Bereich ist also beschrieben durch die beiden Ungleichungen $-\frac{\pi}{2}\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ und $r\le a\cos\phi$. Der gesuchte Flächeninhalt ist daher gleich

$$\begin{aligned}
\int_B \mathrm{d}\omega &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{a\cos\phi}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -a\sqrt{a^2-r^2}\Big|_{r=0}^{a\cos\phi}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -a^2\left(\sqrt{1-\cos^2\phi}-1\right)\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2\left(1-|\sin\phi|\right)\,\mathrm{d}\phi \\
&= a^2(\pi-2)\,.
\end{aligned}$$

13.3. Integralsätze im $\mathbb{R}^3$

Variante 1 (direkte Rechnung): Wir parametrisieren B, analog zur Sphäre, durch

$$(\phi,\theta)\mapsto T(\phi,\theta)=\begin{pmatrix}x(\phi,\theta)\\ y(\phi,\theta)\\ z(\phi,\theta)\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}R\cos\theta\cos\phi\\ R\cos\theta\sin\phi\\ R\sin\theta\end{pmatrix}$$

mit $\phi\in[\,0,2\pi)$ and $\theta\in\left[\,\theta_0,\frac{\pi}{2}\,\right]$, wobei der Winkel θ_0 der Winkel der "Abschneidehöhe" bezeichnet. Es muss gelten

$$x^2+y^2=R^2\,\cos^2\theta_0\,\cos^2\phi+R^2\,\cos^2\theta_0\,\sin^2\phi=R^2\,\cos^2\theta_0=\frac{d^2}{4}$$

und es folgt

$$\cos^2\theta_0 = \frac{d^2}{4R^2}\,.$$

Mit dieser Parametrisierung ist das vektorielle Flächenelement

$$\begin{aligned} d\vec{\omega} &= \frac{\partial T}{\partial \phi} \times \frac{\partial T}{\partial \theta}\, d\phi\, d\theta = \begin{pmatrix} -R\cos\theta\sin\phi \\ R\cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\phi \\ -R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix} d\phi\, d\theta \\ &= \begin{pmatrix} R^2\cos^2\theta\cos\phi \\ R^2\cos^2\theta\sin\phi \\ R^2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} d\phi\, d\theta \end{aligned}$$

tatsächlich nach aussen orientiert, wie verlangt. Es gilt

$$v = \operatorname{rot} F = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Fluss des Vektorfeldes v durch die Oberfläche B des Ballons von innen nach aussen ist

$$\begin{aligned} \int_B v \cdot d\vec{\omega} &= \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2R^2 \sin\theta\cos\theta\, d\phi\, d\theta \\ &= 2\pi R^2 \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \\ &= 2\pi R^2 \Big[-\cos^2\theta\Big]_{\theta=\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi R^2\cos^2\theta_0 \;=\; 2\pi R^2 \cdot \frac{d^2}{4R^2} \;=\; \frac{\pi d^2}{2}. \end{aligned}$$

Variante 2 (Gauss): Sei D der kreisförmige "Deckel", der den Ballon verschliesst, und sei G das Innere der durch $B \cup D$ gebildeten geschlossenen Fläche. Der Gausssche Integralsatz besagt:

$$\int_B v \cdot d\vec{\omega} + \int_D v \cdot d\vec{\omega} = \int_{B\cup D} v \cdot d\vec{\omega} = \int_G \operatorname{div} v\, d\mu = \int_G \operatorname{div} \operatorname{rot} F\; d\mu = 0\,.$$

Um den Fluss durch den "Deckel" D zu berechnen, betrachten wir die Parametrisierung

$$(\phi, r) \mapsto T(\phi, r) = \begin{pmatrix} x(\phi, r) \\ y(\phi, r) \\ z(\phi, r) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z_0 \end{pmatrix}$$

mit $\phi \in [\,0, 2\pi)$ und $r \in \left[\,0, \frac{d}{2}\right]$, wobei $z_0 = R\sin\theta_0$ die "Abschneidehöhe" bezeichnet. Deren vektorielles Flächenelement

$$\begin{aligned} d\vec{\omega} &= \frac{\partial T}{\partial \phi} \times \frac{\partial T}{\partial r}\, d\phi\, dr = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi\, dr \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r\sin^2\phi - r\cos^2\phi \end{pmatrix} d\phi\, dr = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} d\phi\, dr \end{aligned}$$

ist ebenfalls auf den Gesamtballon bezogen nach aussen gerichtet, wie es sein muss. Für den Fluss des Vektorfeldes v durch D erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \int_D v \cdot d\vec{\omega} &= \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} d\phi\, dr = \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{2\pi} -2r\, d\phi\, dr \\ &= -4\pi \int_0^{\frac{d}{2}} r\, dr = -4\pi \left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{\frac{d}{2}} \\ &= \frac{-4\pi d^2}{8} = -\frac{\pi d^2}{2}. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Gauss ist der Fluss des Vektorfeldes v durch D *und* den Ballon B gleich 0. Folglich erhalten wir für den Fluss durch den Ballon

$$\int_B v \cdot d\vec{\omega} = -\int_D v \cdot d\vec{\omega} = \frac{\pi d^2}{2}.$$

Variante 3 (Stokes): Da $v = \operatorname{rot} F$ gilt, bietet sich auch der Satz von Stokes zur Berechnung des Flusses durch B an. Sei γ die geschlossene Kurve, die B berandet. Der Satz von Stokes besagt:

$$\int_B \operatorname{rot} F \cdot d\vec{\omega} = \int_\gamma F \cdot dx.$$

Für γ wählen wir die Parametrisierung

$$t \mapsto \gamma(t) := \begin{pmatrix} \frac{d}{2}\cos t \\ \frac{d}{2}\sin t \\ z_0 \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0\,,\, 2\pi)$, wobei $z_0 = R\sin\theta_0$ die "Abschneidehöhe" bezeichnet.

Diese Parametrisierung von γ umläuft die Ballonoberfläche im mathematisch positiven Sinn, d. h. wir werden am Ende der Rechnung das richtige Vorzeichen erhalten. Der Fluss berechnet sich folglich zu

$$\begin{aligned}
\int_B v \cdot d\vec{\omega} &= \int_B \operatorname{rot} F \cdot d\vec{\omega} = \int_\gamma F \cdot dx = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin t \\ \frac{d}{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin t \\ \frac{d}{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d^2}{4}\, dt = \frac{\pi d^2}{2}\,.
\end{aligned}$$