2.1. y-einfach und x-einfach Bereiche

(a) Aus dem Bild und mit direkten Berechnung erhalten wir, dass $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$ ist. In der Tat gilt

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} y = x \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

und deshalb bekommen wir $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}$.

Wir definieren die zwei Funktionen

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{falls } \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ 3 - x & \text{falls } 1 < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{falls } \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \\ x & \text{falls } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \end{cases},$$

die offenbar stetig sind. Dann gilt

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}, g(x) < y < h(x)\right\}.$$

(b) Analog wie oben können wir sehen, dass $\frac{1}{2} < y < 2$ gilt.

Wir definieren die zwei stetigen Funktionen

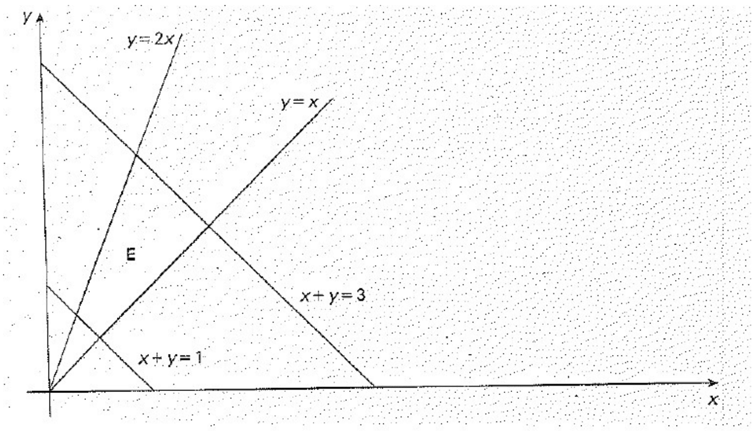
$$h(y) = \begin{cases} y & \text{falls } \frac{1}{2} < y \leq \frac{3}{2} \\ 3 - y & \text{falls } \frac{3}{2} < y < 2 \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1 - y & \text{falls } \frac{1}{2} < y \leq \frac{2}{3} \\ \frac{y}{2} & \text{falls } \frac{2}{3} < y < 2 \end{cases}.$$

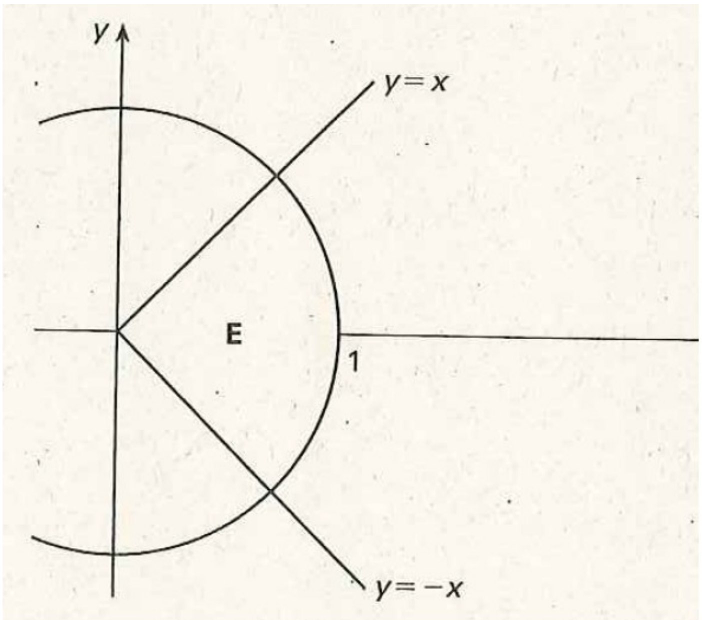
Dann gilt

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < y < 2, g(y) < x < h(y)\right\}$$

und wir sind fertig.



2.2. y-einfach und x-einfach Bereiche



Aus dem Bild sehen wir, dass $-\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.

Wir definieren die zwei stetigen Funktionen

$$g(y) = \begin{cases} -y & \text{falls } -\frac{1}{\sqrt{2}} < y \leq 0 \\ y & \text{falls } 0 < y < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$h(y) = \sqrt{1-y^2}\,, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dann gilt

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{\sqrt{2}} < y < \frac{1}{\sqrt{2}}, g(y) < x < h(y) \right\}$$

und wir folgern, dass E ein x-einfach Bereich ist.

Jetzt definieren wir

$$g(x) = \begin{cases} -x & \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{falls } \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{1-x^2} & \text{falls } \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 \end{cases}$$

Dann gilt

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, g(x) < y < h(x) \right\}$$

und wir folgern, dass E ein y-einfach Bereich ist.

2.3. Die Kettenregel Die Funktion $y(t)$ ist charakterisiert durch die Eigenschaften

$$y'(t) = e^{-t^2}$$

und

$$y(1) = 42\,.$$

Die verallgemeinerte Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f\left(x(t), y(t)\right) &= \nabla f\left(x(t), y(t)\right) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right) \cdot y'(t) \\ &= 2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) \\ &= 2\cos(\pi t) \cdot (-\pi \sin(\pi t)) + 2y(t) \cdot e^{-t^2} \\ &= -2\pi \sin(\pi t)\cos(\pi t) + 2y(t) \cdot e^{-t^2} \\ \frac{d}{dt}\left(f\left(x(t), y(t)\right)\right)\Big|_{t=1} &= -2\pi \underbrace{\sin(\pi)}_{0} \cos(\pi) + 2\underbrace{y(1)}_{42} \cdot e^{-1^2} = 84e^{-1}\,. \end{aligned}$$

2.4. Vertauschung von Ableitung und Integral Wir berechnen $\dot{F}(0)$, wobei die Funktion $t \mapsto F(t)$ durch

$$F(t) := \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x\,(x+1)}\,dx$$

definiert ist. Nach der Leibnizschen Regel darf man zur Ermittlung der Ableitung $\dot{F}(t)$ unter dem Integralzeichen partiell nach t differenzieren. Für unsere Funktion F bedeutet dies

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &= \frac{d}{dt}\int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x\,(x+1)}\,dx \\
&= \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{tx}\sqrt{1+t^2x}}{x\,(x+1)}\right)dx + \frac{e^{t(t^2+2)}\sqrt{1+t^2(t^2+2)}}{(t^2+2)(t^2+3)}\frac{d}{dt}(t^2+2)+ \\
&\quad - \frac{e^{t(2t+1)}\sqrt{1+t^2(2t+1)}}{(2t+1)(2t+2)}\frac{d}{dt}(2t+1) \\
&= \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{x\,e^{tx}\sqrt{1+t^2x}\ +\ e^{tx}\frac{tx}{\sqrt{1+t^2x}}}{x\,(x+1)}\,dx + \frac{e^{t(t^2+2)}\sqrt{1+t^2(t^2+2)}}{(t^2+2)(t^2+3)}2t+ \\
&\quad - \frac{e^{t(2t+1)}\sqrt{1+t^2(2t+1)}}{(2t+1)(2t+2)}2
\end{aligned}$$

Folglich erhalten wir für $t = 0$, dass

$$\left.\frac{d}{dt}F(t)\right|_{t=0} = \int_1^2 \frac{x}{x\,(x+1)}\,dx - 1 = \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx - 1 = \ln\frac{3}{2} - 1\,.$$

2.5. Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$D_x f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} - 2\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,,\quad (x,y) \neq (0,0)$$

und

$$D_x f(0,0) = 0$$

ist.

Somit folgt $D_x f(0, \frac{1}{n}) = \frac{1/n}{1/n^2} = n \to \infty$ und daher kann $D_x f$ an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig sein.

2.6. Es bezeichne $f(x,y)$ die Höhe über Meer an der Stelle (x,y). Wir müssen versuchen, aus den gegebenen Daten den Gradienten $\nabla f(x_0,y_0) =: (A_1, A_2) = \mathbf{A}$ zu bestimmen. Die beiden genannten Himmelsrichtungen werden durch die Vektoren $\mathbf{e}' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ und $\mathbf{e}'' = (0, -1)$ repräsentiert. Es gilt

$$D_{\mathbf{e}'} f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}'$$

und analog für $\mathbf{e}''$. Setzen wir hier die Zahlen ein, so erhalten wir die zwei Gleichungen

$$0.5 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} A_2$$

$$-0.1 = -A_2$$

für die Unbekannten A_1, A_2. Es folgt

$$\nabla f(P) = (0.807, 0.1)\,.$$

Die einzuschlagende Richtung ergibt sich aus

$$\arg(A_1, A_2) = 7.06^\circ\,;$$

in dieser Richtung hat die Steigung (=Höhendifferenz pro Meter Horizontaldistanz) den Wert

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 81\%\,.$$