3.1. Lösungsmenge und Ableitungen

(a) Damit
$$F(x,y) = 0\,,$$
wobei
$$F(x,y) = 4(x+y) - x^2 + 2y\arctan(y) - \log(y^2+1)\,,$$
überall lokal der Graph einer Funktion $y(x)$ ist, müssen wir nach dem impliziten Funktionentheorem
$$F_y(x,y) \neq 0$$
zeigen. Wir berechnen
$$F_y(x,y) = 4 + 2\arctan(y) + \frac{2y}{y^2+1} - \frac{2y}{y^2+1} = 4 + 2\arctan(y)\,.$$
Da
$$\arctan(y) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \pi < 4$$
folgt
$$F_y(x,y) = 4 + 2\arctan(y) > 4 - \pi > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$
und somit die Behauptung.

(b) Die Ableitung von $y(x)$ ist gegeben durch
$$y'(x) = -\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))} = -\frac{4-2x}{4+2\arctan(y(x))} = \frac{x-2}{2+\arctan(y(x))}\,. \tag{1}$$

(c) Um $y''(x)$ zu erhalten, leiten wir (1) auf beiden Seiten ab, daraus folgt mit der Ketteregel
$$y''(x) = \frac{2+\arctan(y(x)) - (x-2)\frac{y'(x)}{y^2+1}}{(2+\arctan(y(x)))^2}$$
Weil $y'(x_0) = 0$ für einen kritischen Punkt x_0 ist, folgt
$$y''(x_0) = \frac{1}{2+\arctan(y(x_0))}\,.$$

3.2. Lösungsmenge und Ableitungen

Es sei
$$F(x,y) := \mathrm{e}^y + y + \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\,.$$

Die partiellen Ableitungen von F sind

$$F_x(x,y) = x - 1$$
$$F_y(x,y) = e^y + 1.$$

(a) Offensichtlich gilt überall $F_y > 0$, also insbesondere $F_y \neq 0$. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass die Lösungsmenge der Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung jeder gegebenen Lösung (x_0, y_0) der Graph einer C^1 Funktion $y = y(x)$ ist. Da $F(x,y)$ sogar beliebig oft stetig differenzierbar ist, gilt dasselbe für die Funktion $y(x)$.

(b) Die Ableitung der Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ nach x liefert mit der Kettenregel

$$F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x) = 0,$$

daraus ergibt sich die Ableitung von $y(x)$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}\,.$$

Die Gleichung $F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x))y'(x) = 0$ leiten wir ein weiteres mal nach x ab, wodurch die zweite Ableitung von y auftaucht. Dazu benützen wir wiederum die Kettenregel und die Produktregel:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dx}\Big(F_x(x, y(x))\Big) + \frac{d}{dx}\Big(F_y(x, y(x))\Big)\cdot y'(x) + F_y(x, y(x))\cdot y''(x)\\
&= F_{xx}(x, y(x)) + F_{xy}(x, y(x))\cdot y'(x) + F_{yx}(x, y(x))\cdot y'(x) + F_{yy}(x, y(x))\cdot (y'(x))^2\\
&\quad + F_y(x, y(x))\cdot y''(x)\\
&= F_{xx}(x, y(x)) + 2F_{xy}(x, y(x))\cdot y'(x) + F_{yy}(x, y(x))\cdot (y')^2(x) + F_y(x, y(x))\cdot y''(x)\,.
\end{aligned}$$

Schlussendlich setzen wir $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ ein und lösen nach y'' auf:

$$y'' = \frac{-F_{xx}\,F_y^2 + 2\,F_x\,F_{xy}\,F_y - F_x^2\,F_{yy}}{F_y^3}\,.$$

An einem kritischen Punkt von y muss $y' = 0$, also $F_x = x - 1 = 0$ und somit $x = 1$ gelten. Wegen $F_x = 0$ ist dort die zweite Ableitung

$$y'' = \frac{-F_{xx}\,F_y^2}{F_y^3} = \frac{-F_{xx}}{F_y} = \frac{-1}{e^y + 1} < 0.$$

Somit liegt an diesem kritischen Punkt ein lokales Maximum von y vor.

Bemerkung: Der zu $x = 1$ gehörende Wert von y erfüllt die Gleichung

$$F(1, y) = e^y + y + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = e^y + y - 1 = 0.$$

Sicher ist $y = 0$ eine Lösung. Sie ist auch die einzige, denn die Funktion $y \mapsto \mathrm{e}^y + y - 1$ hat die Ableitung $\mathrm{e}^y + 1 > 0$, ist also überall streng monoton wachsend, und kann daher höchstens eine Nullstelle auf $\mathbb{R}$ haben.

3.3. Taylor-Entwicklung

Das lineare Taylorpolynom (=Taylorpolynom erster Ordnung) um (x_0, y_0) ist durch

$$j^1_{(x_0,y_0)} f(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

bestimmt, das quadratische durch

$$\begin{aligned} j^2_{(x_0,y_0)} f(x - x_0, y - y_0) =& f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)^2 \\ &+ f_{xy}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

(a) Für die Ableitungen erhalten wir

$$f_x(x, y) = f_{xx}(x, y) = e^x \sin y, \quad f_y(x, y) = e^x \cos y,$$
$$f_{xy}(x, y) = e^x \cos y, \quad f_{yy}(x, y) = -e^x \sin y.$$

und damit im Punkt $(0, \pi/2)$:

$$f(0, \pi/2) = f_x(0, \pi/2) = f_{xx}(0, \pi/2) = 1, \quad f_y(0, \pi/2) = f_{xy}(0, \pi/2) = 0,$$
$$f_{yy}(0, \pi/2) = -1.$$

Das Taylorpolynom ersten Grades ist also

$$j^1_{(0,\pi/2)} f(x - 0, y - \pi/2) = 1 + 1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - \pi/2) = 1 + x$$

und das Taylorpolynom zweiten Grades

$$j^2_{(0,\pi/2)} f(x - 0, y - \pi/2) = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} (y - \pi/2)^2.$$

Für den Punkt $(0, \pi/2 + \frac{1}{4})$ erhalten wir die Näherungen

$$j^1_{(0,\pi/2)} f(0, \frac{1}{4}) = 1, \quad j^2_{(0,\pi/2)} f(0, \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{4})^2 = \frac{31}{32} = 0.96875$$

Der Tatsächliche Wert ist (auf 6 Stellen genau)

$$f(0, \pi/2 + 1/4) = e^0 \sin(\pi/2 + 1/4) = 0.968912$$

Die Näherung durch P_2 ist also sehr gut.

(b) Die Ableitungen sind

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{e^{x/y}}{y} \Rightarrow f_x(1,1) = e \\
f_y(x,y) &= -\frac{xe^{x/y}}{y^2} \Rightarrow f_y(1,1) = -e \\
f_{xx}(x,y) &= \frac{e^{x/y}}{y^2} \Rightarrow f_{xx}(1,1) = e \\
f_{xy}(x,y) &= -\frac{e^{x/y}}{y^2} - \frac{xe^{x/y}}{y^3} \Rightarrow f_{xy}(1,1) = -2e \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{x^2e^{x/y}}{y^4} + \frac{2xe^{x/y}}{y^3} \Rightarrow f_{xy}(1,1) = 3e
\end{aligned}
$$

Als Taylorpolynom erster Ordnung um $(1,1)$ erhält man

$$j^1_{(1,1)}f(x-1,y-1) = e + e(x-1) - e(y-1)$$

und für das quadratische

$$j^2_{(1,1)}f(x-1,y-1) = e + e(x-1) - e(y-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 - 2e(x-1)(y-1) + \frac{3e}{2}(y-1)^2$$

Die Taylorpolynome ergeben die folgenden Apporximationen im Punkt $(5/4, 1/2)$:

$$j^1_{(1,1)}f(5/4-1, 1/2-1) = j^1_{(1,1)}f(1/4, -1/2) = e + \frac{1}{4}e + \frac{1}{2}e = \frac{7}{4}e \approx 4.76$$

bzw.

$$j^2_{(1,1)}f(1/4,-1/2) = e + \frac{1}{4}e + \frac{1}{2}e + e/2\cdot(1/4)^2 - 2e\cdot(1/4)\cdot(-1/2) + 3e/2\cdot(1/2)^2 = \frac{75}{32}e \approx 6.37.$$

Der exakte Funktionswert ist

$$f(5/4, 1/2) = e^{5/2} \approx 12.18$$

Die Approximation durch die Taylorentwicklung ist sehr schlecht. Ein Grund dafür ist der relativ grosse Abstand von $(5/4, 1/2)$ zum Entwicklungspunkt, der andere ist, dass die höheren Ableitungen sehr gross sind, falls y einiges kleiner als 1 oder x einiges grösser als 1 ist. Es gilt z.B.

$$f_{yy}(5/4, 1/2) = (5/4)^2 \cdot 2^4 e^{5/2} + 2^4 \frac{5}{4} \cdot e^{5/4} \approx 548.$$

(c) Es gilt
$$f(x,y) = j^1_{(x_0,y_0)} f(x-x_0, y-y_0) + R_1(x,y)$$
für das Restglied der Taylorentwicklung, dass in der Form

$$R_1(x,y) = \frac{1}{2} f_{xx}(x_s,y_s)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{1}{2} f_{yy}(x_s,y_s)\cdot(y-y_0)^2 + \frac{1}{2} f_{xy}(x_s,y_s)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0)$$

geschrieben werden kann, für eine Zahl $s \in [0,1]$ und $(x_s, y_s) = (x_0 + s(x-x_0), y_0 + s(y-y_0))$.
Auf dem Ball $B_r(0, \pi/2)$ können wir den Fehler also abschätzen durch

$$|R_1(x,y)| \leq 2M \cdot r^2$$

wobei M eine obere Schranke der 2. partiellen Ableitungen ist.
In unserem Fall gilt
$$|f_{xx}(x,y)| = |e^x \sin(y)| \leq e^x \leq e^r$$
für $(x,y) \in B_r(0,\pi/2)$ und analog auch für die Ableitungen f_{xy} und f_{yy}. Wir können also $M = e^r$ als Schranke aller Ableitungen 2. Ordnung auf $B_r(0,\pi/2)$ wählen.
Für den maximalen Fehler auf $B_{1/4}(0,\pi/2)$ ergibt dies die Fehlerabschätzung

$$|R_1(x,y)| \leq 2 \cdot e^{1/4} \cdot (1/4)^2 = \frac{1}{8} e^{1/4} \approx 0.1605.$$

(d) Damit wir sicherstellen können, dass der Fehler kleiner als 10^{-4} ist, suchen wir r so dass (siehe c))
$$2 \cdot r^2 \cdot e^r \leq 10^{-4}$$
ist. Die entsprechende Gleichung können wir nicht exakt lösen, wir müssen aber auch nicht unbedingt den grösstmöglichen Radius bestimmen auf dem die Abschätzung gilt. Wir können folgerndermassen einen sehr guten Radius r bestimmen.
Aus der Gleichung sieht man, dass sicher $r < 10^{-2}$ sein muss und dass damit gilt

$$2r^2 e^r \leq 2r^2 e^{10^{-2}}$$

Falls also
$$2r^2 e^{10^{-2}} \leq 10^{-4}, \text{ d.h. } r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} 10^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{2}10^{-2}} < 10^{-2}$$
gilt die Bedingung
$$2r^2 e^r \leq 2r^2 e^{10^{-2}} \leq 10^{-4}$$
wie gewünscht.
Wir erhalten also die gewünschte Abschätzung auf $B_r(0,\pi/2)$ für $r = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{2}10^{-2}} = 0.703580 \cdot 10^{-2}$.