4.1. Analyse von kritischen Punkten

Zunächst berechnen wir den Gradienten

$$\nabla f(x,y) = \Big(f_x(x,y), f_y(x,y)\Big) = \Big(y^2 + \sin x, 2xy\Big).$$

Für einen kritischen Punkt muss dieser verschwinden, es muss also gelten $y^2 + \sin x = 0$ und $2xy = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt, dass x oder y verschwinden muss. Für $x = 0$ liefert die erste Gleichung $y = 0$, und für $y = 0$ folgt $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Die kritischen Punkte von f sind also genau die Punkte der Form $(x,y) = (k\pi, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Zur Bestimmung des Typs berechnen wir die Hessesche Matrix:

$$H_m(x,y) = \begin{bmatrix} \cos x & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}.$$

In einem kritischen Punkt $(x,y) = (k\pi, 0)$ ist diese:

$$H_m(k\pi, 0) = \begin{bmatrix} \cos k\pi & 0 \\ 0 & 2k\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2k\pi \end{bmatrix}.$$

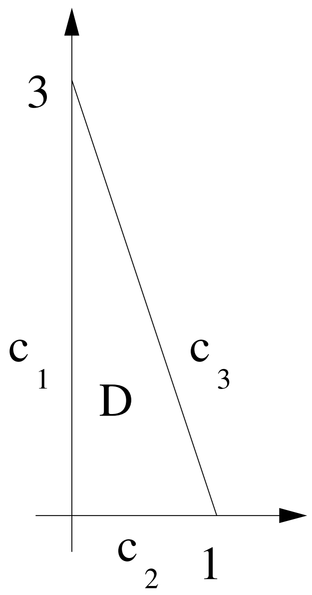
Dies ist bereits eine Diagonalmatrix; ihre Eigenwerte stehen auf der Diagonalen. Daher haben wir die folgenden Fälle:

$k > 0$	gerade	$\Rightarrow$ beide Eigenwerte sind positiv	$\Rightarrow$ lokales Minimum
$k > 0$	ungerade	$\Rightarrow$ ein negativer und ein positiver Eigenwert	$\Rightarrow$ Sattelpunkt
$k = 0$		$\Rightarrow$ ein Eigenwert ist 0	$\Rightarrow$ entarteter Punkt
$k < 0$	gerade	$\Rightarrow$ ein positiver und ein negativer Eigenwert	$\Rightarrow$ Sattelpunkt
$k < 0$	ungerade	$\Rightarrow$ beide Eigenwerte negativ	$\Rightarrow$ lokales Maximum

Zusatz: (war nicht gefragt) Die Situation in der Nähe des entarteten Punkts $(0,0)$ können wir wie folgt analysieren. Zunächst halten wir ein beliebig kleines $y \neq 0$ fest und betrachten die Funktion $x \mapsto f(x,y) = xy^2 - \cos x$. Ihre Ableitung im Punkt $x = 0$ ist $y^2 + \sin x \,\Big|_{x=0} = y^2 \neq 0$. Darum ist dieser Punkt weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum, d.h., es existieren beliebig kleine x mit $f(x,y) > f(0,y)$ und andere beliebig kleine x mit $f(x,y) < f(0,y)$. Nun ist aber $f(0,y) = 0 \cdot y^2 - \cos 0 = -1 = f(0,0)$ unabhängig von y. Für beliebig kleine $y \neq 0$ existieren also beliebig kleine x mit $f(x,y) > f(0,0)$, und entsprechend mit $f(x,y) < f(0,0)$. Somit hat f im Punkt $(0,0)$ weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum.

4.2. Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen

Die Menge D besteht aus den drei Eckpunkten $P_1 = (0,3)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (1,0)$, den Randkurven c_1, c_2, c_3 und dem Inneren $\tilde{D}$.



Die kritische Punkte von f in $\tilde{D}$ müssen die Gleichung

$$\nabla f(x,y) = (2x+7, 2y-2) = (0,0)$$

erfüllen. Wir erhalten den Punkt $(-\frac{7}{2}, 1)$, der nicht in D liegt. Daher liegen die Extrema von $f|_D$ auf dem Rand von D.
Längst c_1 ist $x = 0$ und die bedingt kritischen Punkte von f auf c_1 sind kritischen

Punkte der ersetzten Funktion

$$y \to f(0,y) = y^2 - 2y.$$

Aus der Gleichung $0 = \frac{d}{dy}(f(0,y)) = 2y - 2$ folgt $y = 1$, d.h. wir erhalten den Punkt $P_4 = (0,1) \in D$ mit $f(P_4) = -1$ als "Kandidat“ für eine Extremalstelle von f.
Längst c_2 ist $y = 0$. Ableiten und nullsetzen der Funktion

$$x \to f(x,0) = x^2 + 7x$$

liefert $x = -\frac{7}{2}$. Aber der Punkt $(-\frac{7}{2}, 0)$ gehört nicht zu D.
Längst c_3 ist $y = 3 - 3x$. Es gilt daher die kritischen Punkte der Funktion

$$x \mapsto f(x, 3-3x) = x^2 + (3-3x)^2 + 7x - 2(3-3x) = 10x^2 - 5x + 3.$$

zu bestimmen. Die Gleichung $0 = \frac{d}{dx}\Big(f(x,3-3x)\Big) = 20x - 5$ liefert $x = \frac{1}{4}$, d.h. wir erhalten den Punkt $P_5 = (\frac{1}{4}, 3 - 3\frac{1}{4}) = (\frac{1}{4}, \frac{9}{4}) \in D$ mit

$$f(P_5) = 10\Big(\frac{1}{4}\Big)^2 - 5\Big(\frac{1}{4}\Big) + 3 = \frac{19}{8}$$

als "Kandidat“ für eine Extremalstelle von f.
Wir haben also folgende “Kandidaten”

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
(x,y)	$(0,3)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(\frac{1}{4},\frac{9}{4})$
$f(x,y)$	3	0	8	-1	$\frac{19}{8}$

Es gilt somit

$$\min f|_D(x,y) = f(0,1) = -1 \quad \text{und} \quad \max f|_D(x,y) = f(1,0) = 8.$$

4.3. Parametrisierung von einer Fläche

Die Abbildung $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\mathbf{x}(u,v) := \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} [\,2+\cos(v)\,]\,\cos(u) \\ [\,2+\cos(v)\,]\,\sin(u) \\ \sin(v) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

beschreibt eine Fläche F im Raum.

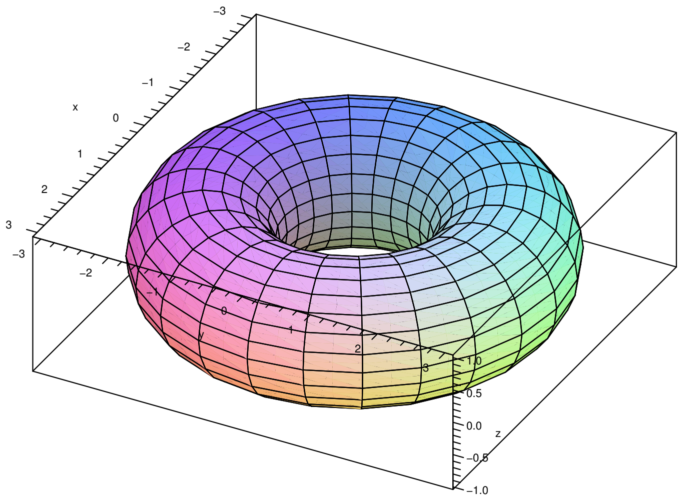
(a) Für $v = 0$ erhalten wir die Abbildung

$$(u,0) \mapsto \begin{pmatrix} 3\cos(u) \\ 3\sin(u) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Diese beschreibt einen Kreis mit Radius 3 in der x-y–Ebene um den Ursprung. Für $u = 0$ erhalten wir die Abbildung

$$(0,v) \mapsto \begin{pmatrix} 2+\cos(v) \\ 0 \\ \sin(v) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Diese beschreibt einen Kreis mit Radius 1 in einer Ebene parallel zur x-z–Ebene um den Punkt $(2,0,0)$. Analoge Überlegungen für $v = -\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}$ und $u = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ liefern weitere Kreise. Alle diese Kurven zusammen bilden einen Torus:



(b) Gesucht ist eine Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$g(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 1. \tag{4}$$

Nun gilt

$$(x(u,v))^2 + (y(u,v))^2 = (\cos^2(u) + \sin^2(u))(2 + \cos(v))^2 = (2 + \cos(v))^2, \tag{5}$$

also

$$\left(\sqrt{(x(u,v))^2 + (y(u,v))^2} - 2\right)^2 = \cos^2(v) = 1 - \sin^2(v) = 1 - (z(u,v))^2. \tag{6}$$

In anderen Worten ist

$$\left(\sqrt{(x(u,v))^2 + (y(u,v))^2} - 2\right)^2 + (z(u,v))^2 = 1, \tag{7}$$

unabhängig von (u,v). Also ist

$$g(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2. \tag{8}$$

ein Kandidat für die gesuchte Funktion. Um zu sehen, dass die so definierte Funktion g tatsächlich den Torus als Niveaufläche zum Niveau 1 hat, setzen wir rückwärts ein und bemerken, dass es für alle Punkte (x,y,z), welche $g(x,y,z) = 1$ erfüllen, ein Paar (u,v) gibt mit $\mathbf{x}(u,v) = (x,y,z)^T$.

4.4. y-einfach und x-einfach Bereiche Mit direkten Berechnung erhalten wir, dass $-e^\pi \leq y \leq e^\pi$ ist.

Wir definieren die zwei Funktionen

$$h(y) = \pi\,, \quad -e^\pi \leq y \leq e^\pi$$

$$g(y) = \begin{cases} \log(-y) & \text{falls } -e^\pi \leq y \leq -1 \\ 0 & \text{falls } -1 < y < 1 \\ \log(y) & \text{falls } 1 \leq y \leq e^\pi\,, \end{cases}$$

die offenbar stetig sind. Dann gilt

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -e^\pi \leq y \leq e^\pi, g(y) < x < h(y)\Big\}\ .$$

und wir sind fertig.