5.1. Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Aus Symmetriegründen genügt es, das Problem im Quandranten $x, y > 0$ zu betrachten. Ein Viertel der Fläche des Rechtecks ist xy. Mit der Nebenbedingung, dass der Eckpunkt des Rechtecks auf der Ellipse liegen soll, ergibt sich die Lagrange Funktion

$$F(x, y, \lambda) = xy - \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

Ableiten und Null setzen liefert die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} F_x &= y - 2\lambda\frac{x}{a^2} = 0 \\ F_y &= x - 2\lambda\frac{y}{b^2} = 0 \\ F_\lambda &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Aus den ersten zwei gleichungen kriegen wir zuerst $y = 2\lambda\frac{x}{a^2}$ und dann $x\left(1 - \frac{4\lambda^2}{a^2b^2}\right) = 0$. Da $x > 0$ folgt $\lambda = \pm\frac{ab}{2}$, also $y = \pm\frac{b}{a}x$. Da wir $x, y > 0$ betrachten, brauchen wir nur $y = \frac{b}{a}x$. Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt (nur positive Lösung betrachten)

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Die gesamte Fläche des Rechtecks ist also $4xy = 2ab$. Die Ellipsenfläche ist πab.

5.2. Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Zuerst müssen wir sicher sein, dass f ein globales Maximum annimmt. Um die Existenz zu zeigen, beachte zuerst, dass f eine stetige Funktion ist. Sodann ist die durch $G = F = 0$ definierte Teilmenge abgeschlossen, da sie durch zwei Gleichungen in stetigen Funktionen beschrieben ist. Ausserdem ist sie beschränkt, denn die Gleichung $F(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$ impliziert $|x|$, $|y|$,$|z| \leq 1$. Daher ist die Menge kompakt. Da jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt, können wir sicher sein, dass ein globales Maximum gibt.

Wir suchen das Maximum der Funktion $f(x, y, z) := x$ auf der durch die Gleichungen $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ definierten Kurve mit

$$F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 \;\text{ und }\; G(x, y, z) := x^3 + y^3 + z^3. \tag{1}$$

Gemäss Vorlesung liegt dieses an einem Punkt, an welchem gilt

$$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \nabla F + \mu \nabla G \\ F &= 0 \\ G &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

was äquivalent ist zum Gleichunssystem

$$\begin{aligned} \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 3x^2 &= 1 \\ \lambda \cdot 2y + \mu \cdot 3y^2 &= 0 \\ \lambda \cdot 2z + \mu \cdot 3z^2 &= 0 \\ F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ G(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Fall 1: $\boxed{y = 0}$ Die Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ besagt dann $x^3 + z^3 = 0$, woraus $z = -x$ folgt. Aus der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ folgt dann weiter

$$2x^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Fall 2: $\boxed{z = 0}$ Analog zu Fall 1 folgt $y = -x$ und $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Fall 3: $\boxed{y \neq 0 \text{ und } z \neq 0}$ Wäre dann $\mu = 0$, so würde aus der Gleichung $\lambda \cdot 2z + \mu \cdot 3z^2 = 0$ folgen $\lambda = 0$, was der Gleichung $\lambda \cdot 2x + \mu \cdot 3x^2 = 1$ widerspricht. Also ist $\mu \neq 0$. Die Gleichungen $\lambda \cdot 2y + \mu \cdot 3y^2 = 0$ und $\lambda \cdot 2z + \mu \cdot 3z^2 = 0$ liefern dann

$$y = z = -\frac{2\lambda}{3\mu}. \tag{5}$$

Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, dann erhalten wir

$$x^3 + 2y^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = z = -\frac{x}{\sqrt[3]{2}} \tag{6}$$

und durch Einsetzen in die erste Gleichung folgt

$$x^2 + 2 \cdot \frac{x^2}{2^{2/3}} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + 2^{1/3}}}\,. \tag{7}$$

Möglichen Kandidaten für das Maximum von $f(x,y,z) = x$ sind nur unter solchen $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ zu finden, für die x positives Vorzeichen hat, also in den jeweiligen Fällen

$$x = +\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{1+2^{1/3}}}\,. \tag{8}$$

Aus $1 < 2^{1/3}$ folgt

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{1+2^{1/3}}}\,. \tag{9}$$

Folglich hat das gesuchte Maximum den Wert

$$f_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{10}$$

und wird genau an den beiden Punkten

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{11}$$

angenommen.

5.3. Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Gesucht sind die globalen Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x - y - z$ unter der Nebenbedingung, dass die Funktionen $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 1$ und $h(x,y,z) = 3x - 4z$ beide verschwinden. Zunächst suchen wir alle lokalen Extrema mittels der Lagrangemethode mit 2 Lagrangemultiplikatoren λ und μ. Zu lösen ist dafür die Gleichung

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \nu \nabla h \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\,.$$

Zusammen mit den Gleichungen $g = 0$ und $h = 0$ ergibt dies das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 - 1 &= 0 \\ 3x - 4z &= 0 \\ 2\lambda x + 3\nu &= 1 \\ 4\lambda y &= -1 \\ -4\nu &= -1 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt $\nu = \frac{1}{4}$, woraus man durch Einsetzen in die dritte und vierte Gleichung die Relation $y = -2x$ ableiten kann. Einsetzen in die erste Gleichung liefert sodann $9x^2 - 1 = 0$, also $x = \pm\frac{1}{3}$. Daraus folgt $y = \mp\frac{2}{3}$, sowie durch Einsetzen in die zweite Gleichung $z = \frac{3x}{4} = \pm\frac{1}{4}$. Es gibt also genau die zwei bedingt kritischen Punkte

$$\left(\pm\frac{1}{3}, \mp\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{4}\right) = \pm\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right) =: \pm P.$$

Die dortigen Werte der Funktion f sind:

$$f(\pm P) = \pm\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \pm\frac{3}{4}\,.$$

Der einzige Kandidat für ein globales Maximum ist also P, der einzige Kandidat für ein globales Minimum $-P$. Es bleibt aber zu zeigen, dass dies wirklich globale Extrema sind. Dies folgt, sobald wir wissen, dass es überhaupt ein globales Maximum bzw. Minimum gibt.

Um die Existenz zu zeigen, beachte zuerst, dass f eine stetige Funktion ist. Sodann ist die durch $g = h = 0$ definierte Teilmenge abgeschlossen, da sie durch zwei Gleichungen in stetigen Funktionen beschrieben ist. Ausserdem ist sie beschränkt, denn die Gleichung $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ impliziert $|x|$, $|y| \le 1$, und daraus folgt mit der Gleichung $h(x, y, z) = 3x - 4z = 0$ auch $|z| \le 1$. Daher ist die Menge kompakt. Da jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt, existieren die gesuchten Extrema und liegen nach obigem in $\pm P$.

5.4. Die Jacobi-Determinante

Für $x_1 + x_2 + x_3 \neq 1$ haben wir:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{1-x_1-x_2-x_3} \\ \frac{x_2}{1-x_1-x_2-x_3} \\ \frac{x_3}{1-x_1-x_2-x_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_x &= \begin{bmatrix} \frac{1-x_2-x_3}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{x_1}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{x_1}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} \\ \frac{x_2}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{1-x_1-x_3}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{x_2}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} \\ \frac{x_3}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{x_3}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} & \frac{1-x_1-x_2}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^2} \cdot \begin{bmatrix} 1-x_2-x_3 & x_1 & x_1 \\ x_2 & 1-x_1-x_3 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1-x_1-x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad J_f(x) = \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^6} \cdot \det \begin{bmatrix} 1-x_2-x_3 & x_1 & x_1 \\ x_2 & 1-x_1-x_3 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1-x_1-x_2 \end{bmatrix}$$

(Jetzt addiere die zweite und dritte Zeile zur ersten)

$$= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^6} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1-x_1-x_3 & x_2 \\ x_3 & x_3 & 1-x_1-x_2 \end{bmatrix}$$

(Jetzt subtrahiere die erste Spalte von der zweiten und dritten)

$$= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^6} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1-x_1-x_2-x_3 & 0 \\ x_3 & 0 & 1-x_1-x_2-x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^6} \cdot (1-x_1-x_2-x_3)^2$$

$$= \frac{1}{(1-x_1-x_2-x_3)^4}$$

5.5. Die Jacobi-Matrix

Die Jacobi-Matrix von α ist

$$\begin{pmatrix} 2x & e^y \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Jacobi-Matrix von β ist

$$\begin{pmatrix} v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel bekommen wir daher

$$\left[\frac{\partial(\gamma_1,\gamma_2)}{\partial(x,y)}\right] = \begin{pmatrix} v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{u=x^2+e^y, v=x+y, w=y} \cdot \begin{pmatrix} 2x & e^y \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x+y & x^2+e^y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & e^y \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x^2+2xy+e^y & e^y(x+y+1)+x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.6. Die Jacobi-Matrix

Die Jacobi-Matrix von F ist

$$\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$$

und die Jacobi-Matrix von Φ ist

$$\begin{pmatrix} \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel bekommen wir deshalb

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial(\Phi \circ F)}{\partial(u,v)}\right] &= \begin{pmatrix} \Phi_x(F) & \Phi_y(F) & \Phi_z(F) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Phi_x(F)f_u + \Phi_y(F)g_u + \Phi_z(F)h_u; & \Phi_x(F)f_v + \Phi_y(F)g_v + \Phi_z(F)h_v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \Phi_x(F)f_u + \Phi_y(F)g_u + \Phi_z(F)h_u$$

und

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \Phi_x(F)f_v + \Phi_y(F)g_v + \Phi_z(F)h_v\,.$$