6.1. x-einfacher Bereich

Wir lösen das System

$$\begin{cases} xy^2 = 1 \\ y = ax \end{cases}$$

und erhalten $x = a^{-\frac{1}{3}}$ und $y = a^{\frac{2}{3}}$. Daher folgt $0 < y < a^{\frac{2}{3}}$.

Wir definieren die zwei stetigen Funktionen $\phi(y) = \frac{y}{a}, 0 < y < a^{\frac{2}{3}}$ und

$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{y}{b}\,, & 0 < y \leq b^{\frac{2}{3}} \\ y^{-\frac{1}{2}}\,, & b^{\frac{2}{3}} < y < a^{\frac{2}{3}}\,. \end{cases}$$

Somit bekommen wir $\phi(y) < x < \psi(y)$, d.h.

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < a^{\frac{2}{3}}, \phi(y) < x < \psi(y)\right\}\,.$$

6.2. Mehrfache Integrale

(a)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}y^2\Big|_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= \left(\frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{6}\right)_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 (x^3 + 3x^2y + y^3)\,dx\,dy &= \int_0^1 \frac{x^4}{4} + x^3y + y^3x\Big|_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + y + y^3\right) dy \\
&= \left(\frac{y}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right)_0^1 \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_1^3\int_0^1(\sqrt{y}+x-3xy^2)\,dx\,dy &= \int_1^3 \sqrt{y}x+\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x^2y^2\Big|_0^1\,dy\\ &= \int_1^3\left(\sqrt{y}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}y^2\right)\,dy\\ &= \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+\frac{y}{2}-\frac{y^3}{2}\right)_1^3\\ &= 2\sqrt{3}-\frac{38}{3}\,.\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\int_0^\pi \sin^2(x)\sin^2(y)\,dx\,dy &= \int_0^\pi \sin^2(y)\left(\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx\right)\,dy\\ &= \int_0^\pi \sin^2(y)\,dy\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx\\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\ &= \frac{\pi^2}{4}\,.\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/2} -\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}\,dy\\ &= \int_0^{\pi/2}\left(-\cos(\pi/2+y)+\cos(y)\right)\,dy\\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\sin(y)+\cos(y)\right)\,dy\\ &= \left(-\cos(y)+\sin(y)\right)_0^{\pi/2}\\ &= 2\,.\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1(e^x+e^y)\,dy\,dx &= \int_0^1 ye^x+e^y\Big|_0^1\,dx\\ &= \int_0^1\left(e^x+e-1\right)\,dx\\ &= \left(e^x+(e-1)x\right)_0^1\\ &= 2(e-1)\,.\end{aligned}$$

6.3. Die Jacobi-Determinante

(a) Für festes $r > 0$ und $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ parametrisiert f eine Sphäre vom Radius r. Das erkennen wir wie folgt: Sei der Punkt $\xi = \left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Dann ist die Länge $|f(\xi)| = r$. Ausserdem läuft $r\sin(\theta)$ für $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ von $-r$ bis r. Dadurch erhalten wir alle möglichen Werte für z auf der Sphäre mit Radius r. Für ein solches $z \in [-r, r]$ erhalten wir alle möglichen Werte für x und y durch Variieren von ϕ.

(b) Es gilt

$$f\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

mit

$$\nabla f\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -r\sin(\theta)\cos(\phi) & -r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Entwickeln nach der letzten Zeile gibt die Determinante

$$\begin{aligned} \det \nabla f\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} &= \sin(\theta) \cdot \begin{vmatrix} -r\sin(\theta)\cos(\phi) & -r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ -r\sin(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \end{vmatrix} \\ &\quad -r\cos(\theta) \cdot \begin{vmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -r\cos(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) & r\cos(\theta)\cos(\phi) \end{vmatrix} \\ &= \sin(\theta)\ r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\left(-\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)\right) \\ &\quad -r\cos(\theta)\ r\cos^2(\theta)\left(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\right) \\ &= -r^2\cos(\theta)(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \\ &= -r^2\cos(\theta)\ . \end{aligned}$$

6.4. Die Kettenregel

Bevor wir die Aufgabe lösen erinnern wir uns an die allgemeine Kettenregel. Seien $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ zwei differenzierbare Funktionen. Die Verknüpfung $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist auch differenzierbar und ihre Funktionalmatrix an der Stelle $p \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\left[\frac{\partial(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})}{\partial \mathbf{x}}\right]_p = \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{\mathbf{f}(p)} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right]_p$$

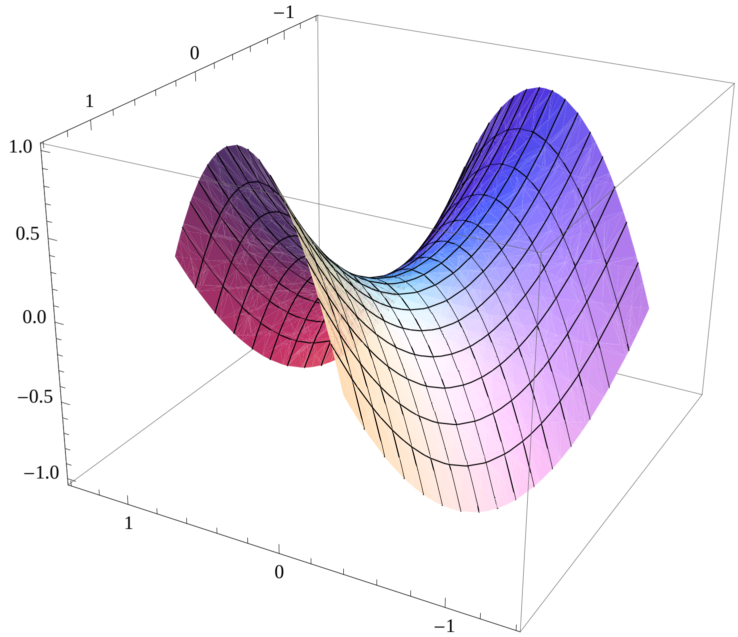
Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix},$$

sowie die Projektion auf die (y,z)–Ebene

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die durch $\mathbf{f}$ beschriebene Fläche sieht folgendermassen aus:



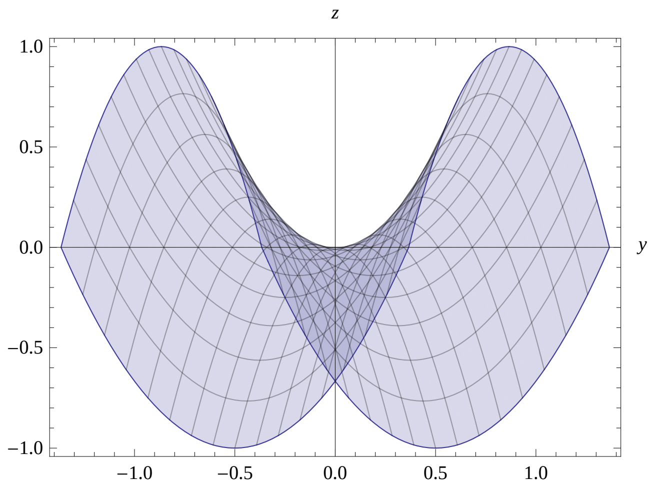
(a) Wir haben

$$(\Pi \circ \mathbf{f})(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix},$$

also

$$\frac{\partial(\Pi \circ \mathbf{f})}{\partial(u,v)}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & -2v \end{pmatrix}.$$

Die Projektion auf die (y,z)-Ebene sieht wie folgt aus



(b) Es gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial(u,v)}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & -2v \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial(x,y,z)}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die mehrdimensionale Kettenregel liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Pi \circ \mathbf{f})}{\partial(u,v)}(u,v) &= \frac{\partial \Pi}{\partial(x,y,z)}(\mathbf{f}(u,v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial(u,v)}(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2u & -2v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies entspricht genau dem, was die Kettenregel besagt.

(c) Wir betrachten die Determinante von $\Pi \circ \mathbf{f}$:

$$\det \frac{\partial(\Pi \circ \mathbf{f})}{\partial(u,v)}(u,v) = -\sqrt{3}v + u\,.$$

Diese verschwindet genau dann, wenn $u = \sqrt{3}v$ ist. Folglich ist $(\Pi \circ \mathbf{f})(u,v)$ für alle Punkte $(u,v) = (\sqrt{3}t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, nicht regulär.

6.5. Orthogonaltrajektorien

Wir "differenzieren" die Gleichung nach x und bekommen

$$y' = -\frac{1}{(x+c)^2} = -\frac{1}{x+c} \cdot \frac{1}{x+c}\,.$$

Weil $y = \frac{1}{x+c}$ ist, gilt

$$y' = -y^2\,,$$

was unabhängig von c ist.

Die Differenzialgleichung der Orthogonaltrajektorien ist daher

$$y' = -\frac{1}{-y^2} = \frac{1}{y^2}\,.$$

Wir lösen diese Gleichung

$$\begin{aligned} y^2 dy &= dx \\ \int y^2\, dy &= \int dx \end{aligned}$$

und bekommen $y^3 = 3x + K$.

Das ist die Familie der Orthogonaltrajektorien von Γ.