8.1. Die Gesamtmasse

Wir betrachten die Menge

$$B' = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 2 - y\} .$$

Dann können wir B schreiben als

$$B = \{(x, y, z) : (x, y) \in B', 0 \leq z \leq 2 - x - y\} .$$

Das Gesamtmasse ist

$$\begin{aligned}
m(B) &= \int_B y^2 dV \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{2-x-y} y^2 \, dzdxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-y} y^2(2 - x - y) \, dxdy \\
&= \int_0^2 (2y^2(2 - y) - \frac{(2 - y)^2 y^2}{2} - y^3(2 - y)) \, dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 (4y^2 - 4y^3 + y^4) \, dy \\
&= \frac{8}{15} .
\end{aligned}$$

8.2. Das Trägheitsmoment

Wir benutzen die Formel aus der Vorlesung und bekommen

$$\begin{aligned}
\Theta &= \int_Q r^2(x, y, z)\delta(x, y, z) \, dxdydz \\
&= \int_Q (x^2 + y^2)z^2 \, dxdydz \\
&= \int_{-c}^c z^2 \int_{-b}^b \int_{-a}^a (x^2 + y^2) \, dxdydz \\
&= \left(\int_{-c}^c z^2 \, dz\right) \left(\int_{-b}^b \int_{-a}^a (x^2 + y^2) \, dxdy\right) \\
&= \frac{2c^3}{3} \left(\int_{-b}^b \frac{2a^3}{3} + 2y^2 a \, dy\right) \\
&= \frac{2c^3}{3} \left(\frac{4a^3 b}{3} + \frac{4ab^3}{3}\right) \\
&= \frac{8}{9} abc^3(a^2 + b^2) .
\end{aligned}$$

8.3. Das Volumen

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r\cos\phi) r \, dr d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r - r^2\cos\phi) \, dr d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\cos\phi\right)\Bigg|_0^1 d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos\phi\right) d\phi \\
&= \pi \, .
\end{aligned}$$

(b) Es gilt $-3 \leq y \leq 3$. Daher ist $z = y + 3 \geq 0$ und die Ebene $z = y + 3$ ist oberhalb der Ebene $z = 0$. Der Körper ist symmetrisch bezüglich der yz-Ebene und somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_{-3}^{3}\int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}} (y+3) \, dx dy \\
&= 2\int_{-3}^{3} (y+3)x\Big|_0^{\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}} dy \\
&= 2\int_{-3}^{3} (y+3)\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2} \, dy \\
&= \frac{4}{3}\int_{-3}^{3} y\sqrt{9-y^2} \, dy + 4\int_{-3}^{3}\sqrt{9-y^2} \, dy \\
&= 0 + 2 \cdot 9\pi \\
&= 18\pi \, .
\end{aligned}$$

8.4. Der Schwerpunkt

Zuerst berechnen wir die Masse von Ω: (B bezeichnet die Menge $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$)

$$\begin{aligned}
m(\Omega) &= \int_\Omega \delta(x, y, z) dxdydz \\
&= \int_\Omega dxdydz \\
&= \int_B \left(\int_{x^2+y^2}^1 dz \right) dxdy \\
&= \int_B \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(1 - r^2\right) r\, dr \right] d\phi \\
&= 2\pi \left[\int_0^1 \left(r - r^3\right)\, dr \right] \\
&= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right)_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Jetzt wollen wir $\int_\Omega x\, dxdydz$ berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega x\, dxdydz &= \int_B \left(\int_{x^2+y^2}^1 x\, dz \right) dxdy \\
&= \int_B x \left(1 - x^2 - y^2\right) dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 r\cos\phi \left(1 - r^2\right) r\, dr \right] d\phi \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi \right) \cdot \left(\int_0^1 r^2 (1 - r^2)\, dr \right) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Darum folgt

$$x_S = \frac{\int_\Omega x\, dxdydz}{m(\Omega)} = 0\,.$$

Analog kann man beweisen, dass $y_S = 0$ ist.

Es verbleibt z_S zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega z\,dxdydz &= \int_B \left(\int_{x^2+y^2}^1 z\,dz\right) dxdy \\
&= \int_B \left(\frac{1}{2} - \frac{(x^2+y^2)^2}{2}\right) dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(1-r^4\right) r\,dr\right] d\phi \\
&= \pi \left[\int_0^1 \left(r - r^5\right)\,dr\right] \\
&= \pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^6}{6}\right)_0^1 \\
&= \frac{\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

und darum

$$z_S = \frac{\pi/3}{m(\Omega)} = \frac{\pi/3}{\pi/2} = \frac{2}{3}\,.$$

Der Schwerpunkt von Ω ist

$$S = \left(0, 0, \frac{2}{3}\right)\,.$$