9.1. Mehrfache Integrale

Zunächst bestimmen wir die Schnittkurve der Ebene mit dem Paraboloid. Einsetzen der Paraboloid-Gleichung in die Ebenengleichung ergibt

$$2x - 8y + x^2 + 2y^2 = 7$$

und somit

$$(x+1)^2 + 2(y-2)^2 = 16.$$

Also ist die Schnittkurve (projiziert auf die xy-Ebene) eine Ellipse mit Halbachsen 4 und $2\sqrt{2}$. Wir führen somit die Ellipsen-Koordinaten

$$\begin{cases} x &= 4r\cos(\phi) - 1 \\ y &= 2\sqrt{2}r\sin(\phi) + 2 \end{cases} \qquad (r,\phi) \in [0,1] \times [0, 2\pi]$$

ein. Die Jacobische Determinante der Transformation ist

$$\det \begin{pmatrix} 4\cos\phi & -4r\sin\phi \\ 2\sqrt{2}\sin\phi & 2\sqrt{2}r\cos\phi \end{pmatrix} = 8\sqrt{2}r\,.$$

Das zugehörige Flächenelement beträgt $dA = 8\sqrt{2}r\,dr\,d\phi$. Das Volumen unter der Ebene beträgt

$$\begin{aligned} V_1 &= \iint_E (7 - 2x + 8y)\,dA = 8\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} (25r - 8r^2\cos(\phi) + 16\sqrt{2}r^2\sin(\phi))\,d\phi\,dr \\ &= 200\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

Das Volumen unter dem Paraboloid beträgt

$$\begin{aligned} V_2 &= \iint_E (x^2 + 2y^2)\,dA \\ &= 8\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} \left((4r\cos(\phi) - 1)^2 + 2\left(2\sqrt{2}r\sin(\phi) + 2\right)^2\right) r\,d\phi\,dr \\ &= 8\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} (16r^3\cos^2(\phi) - 8r^2\cos(\phi) + r + 16r^3\sin^2(\phi) \\ &\qquad + 16\sqrt{2}r^2\sin\phi + 8r)\,d\phi\,dr \\ &= 8\sqrt{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} (16r^3 - 8r^2\cos(\phi) + 16\sqrt{2}r^2\sin(\phi) + 9r)\,d\phi\,dr \\ &= 16\pi\sqrt{2}\int_0^1 (16r^3 + 9r)\,dr = 136\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

Das eingeschlossene Volumen ist also

$$V = V_1 - V_2 = (200 - 136)\pi\sqrt{2} = 64\pi\sqrt{2} \approx 284.34$$

9.2. Mehrfache Integrale

(a) Wir benutzen die übliche Kugelkoordinaten $x = r\cos\theta\cos\phi,\ y = r\cos\theta\sin\phi$, $z = r\sin\theta$. Es folgt

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_{\arcsin(-a)}^{\arcsin a}\int_{\frac{\sqrt{1-a^2}}{\cos\theta}}^{1} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\\
&= \frac{2\pi}{3}\int_{\arcsin(-a)}^{\arcsin a}(\cos\theta)r^3\Big|_{r=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\cos\theta}}^{r=1}d\theta\\
&= \frac{2\pi}{3}\int_{\arcsin(-a)}^{\arcsin a}(\cos\theta-\frac{(1-a^2)^{3/2}}{\cos^2\theta})\,d\theta\\
&\overset{(*)}{=} \frac{4\pi}{3}\int_0^{\arcsin a}(\cos\theta-\frac{(1-a^2)^{3/2}}{\cos^2\theta})\,d\theta\\
&= \frac{4\pi}{3}\Big(\sin\theta-(1-a^2)^{3/2}\tan\theta\Big)\Big|_0^{\arcsin a}\\
&= \frac{4\pi}{3}\Big(a-(1-a^2)^{3/2}\tan(\arcsin a)\Big)\\
&\overset{(**)}{=} \frac{4\pi}{3}\Big(a-(1-a^2)a\Big)=\frac{4}{3}\pi a^3.
\end{aligned}$$

wobei bei $(*)$ wurde benutzt, dass die Funktion $\theta\mapsto\cos\theta-\frac{(1-a^2)^{3/2}}{\cos^2\theta}$ gerade ist und bei $(**)$ wurde die Formel $\tan(\arcsin a)=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ verwendet.

(b) Analog wie bei Teil a) gilt

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_{\arcsin(-a/R)}^{\arcsin(a/R)}\int_{\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{\cos\theta}}^{R} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\phi\\
&= \frac{2\pi}{3}\int_{\arcsin(-a/R)}^{\arcsin(a/R)}(\cos\theta)r^3\Big|_{r=\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{\cos\theta}}^{r=R}d\theta\\
&= \frac{2\pi}{3}\int_{\arcsin(-a/R)}^{\arcsin(a/R)}R^3\cos\theta-\frac{(R^2-a^2)^{3/2}}{\cos^2\theta}\,d\theta\\
&= \frac{4\pi}{3}\int_0^{\arcsin(a/R)}R^3\cos\theta-\frac{(R^2-a^2)^{3/2}}{\cos^2\theta}\,d\theta\\
&= \frac{4\pi}{3}\Big(R^3\sin\theta-(R^2-a^2)^{3/2}\tan\theta\Big)\Big|_0^{\arcsin(a/R)}\\
&= \frac{4\pi}{3}\Big(aR^2-(R^2-a^2)^{3/2}\tan(\arcsin(a/R))\Big)\\
&= \frac{4\pi}{3}\Big(aR^2-(R^2-a^2)a\Big)=\frac{4}{3}\pi a^3.
\end{aligned}$$

Das Resultat hängt nicht von R ab!

(c) Es gilt

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-a}^{a} \left(\pi(\sqrt{1-z^2})^2 - \pi(\sqrt{1-a^2})^2\right) dz \\
&= \int_{-a}^{a} \pi \left(1 - z^2 - 1 + a^2\right) dz \\
&= \int_{-a}^{a} \pi \left(-z^2 + a^2\right) dz \\
&= \pi \left(-\frac{z^3}{3} + a^2 z\right)_{-a}^{a} \\
&= \frac{4}{3}\pi a^3 .
\end{aligned}
$$

9.3. Mehrfache Integrale

Wenn man die Einheitssphäre $x^2+y^2+z^2=1$ mit dem Kegel $x^2+y^2=3z^2$ schneidet, findet man $3z^2 = x^2+y^2 = 1-z^2$ d.h. $z = \pm\frac{1}{2}$ und da die Eistüte oberhalb der $xy-$Ebene liegt, gilt $z=\frac{1}{2}$.
Wir benutzen die übliche Kugelkoordinaten $x = r\cos\theta\cos\phi,\ y = r\cos\theta\sin\phi$, und $z = r\sin\theta$.

Die Integrationsgrenzen sind (vergleiche Bild) $0 \le r \le 1$, $0 \le \phi \le 2\pi$ und $\arcsin(1/2) \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ d.h. $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Das gesuchte Volumen ist somit

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2\cos\theta\, d\phi\, d\theta\, dr &= 2\pi \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\theta\, d\theta\, dr \\
&= 2\pi \int_0^1 (r^2\sin\theta)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(r^2 - \frac{r^2}{2}\right) dr \\
&= \pi \int_0^1 r^2\, dr \\
&= \pi \left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_{r=0}^{1} = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

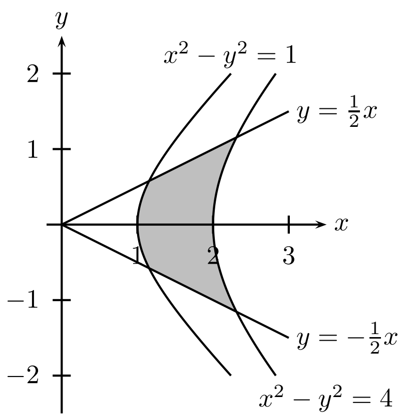
9.4. Transformationssatz

(a) $x(u,v) = u\cosh v$, $y(u,v) = u\sinh v$.

$$\begin{aligned} |J_T| = \ \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} \cosh v & u\sinh v \\ \sinh v & u\cosh v \end{pmatrix} \\ &= u(\cosh^2 v - \sinh^2 v) = u\,. \end{aligned}$$

(b) Wir betrachten den Bereich

$$\Big\{(x\,,\,y)\mid\ 1 \le x^2 - y^2 \le 4\,,\ -\tfrac{1}{2}x \le y \le \tfrac{1}{2}x\,,\ x > 0\Big\}$$



Der Bereich B.

Sei nun

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cosh v \\ u\sinh v \end{pmatrix}\,.$$

Aus der Bedingung $x > 0$ folgt

$$u\cosh v > 0\,.$$

Da $\cosh v = \frac{1}{2}\left(e^v + e^{-v}\right) > 0$ ist dies äquivalent zu

$$u > 0\,. \tag{1}$$

Mithilfe von $\cosh^2 v - \sinh^2 v = 1$ folgt

$$1 \le x^2 - y^2 \le 4 \Longleftrightarrow 1 \le u^2\left(\cosh^2 v - \sinh^2 v\right) \le 4 \Longleftrightarrow 1 \le u^2 \le 4\,.$$

Wegen (1) ist dies äquivalent zu

$$1 \le u \le 2\,. \tag{2}$$

Weiter folgt aus $-\frac{1}{2}x \leq y \leq \frac{1}{2}x$, dass

$$-\frac{1}{2}u\cosh v \leq u\sinh v \leq \frac{1}{2}u\cosh v\,.$$

Da $u > 0$ und $\cosh v > 0$ ist dies äquivalent zu

$$-\frac{1}{2} \leq \tanh v \leq \frac{1}{2}\,,$$

wobei $\tanh v = \frac{\sinh v}{\cosh v}$. Daraus folgt

$$\operatorname{arctanh}\left(-\frac{1}{2}\right) \leq v \leq \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\right)\,.$$

Mithilfe von $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$ und $\operatorname{arctanh}(-x) = -\operatorname{arctanh}(x)$ folgt

$$-\frac{1}{2}\ln 3 \leq v \leq \frac{1}{2}\ln 3\,. \tag{3}$$

Die beiden Bedingungen (1) und (3) ergeben schliesslich

$$\tilde{B} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \leq u \leq 2\,,\ -\frac{1}{2}\ln 3 \leq v \leq \frac{1}{2}\ln 3\right\}\,.$$

(c) Sei

$$\tilde{f}(u,v) \;=\; f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \;=\; e^{-u^2(\cosh^2 v - \sinh^2 v)} \;=\; e^{-u^2}$$

Dann:

$$\begin{aligned}
\int_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(u,v)\,|J_T|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{v=-\frac{1}{2}\log 3}^{\frac{1}{2}\log 3} \int_{u=1}^{2} e^{-u^2}\; u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \log 3 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}e^{-u^2}\right)\Big|_1^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\log 3 \cdot \left(e^{-1} - e^{-4}\right) \;\approx\; 0.192
\end{aligned}$$