Online-Serie 1

Einsendeschluss: **Montag, 7. März 2016, 13:00 Uhr**

---

1. Sei $Q := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Q ist

√ (a) offen.

(b) abgeschlossen.

Sei $(x, y) \in Q$ und $r = \frac{1}{2}\min(x, 1-x, y, 1-y)$. Sei $(u, v) \in B_r(x, y)$, d.h.

$$(u-x)^2 + (v-y)^2 < r^2 .$$

Insbesondere gilt

$$|u-x| < r$$
$$\Leftrightarrow$$
$$-r + x < u < x + r .$$

Definitionsgemäss gilt

$$-\frac{x}{2} + x < u < x + \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\frac{x}{2} < u < \frac{x}{2} + \frac{1}{2} .$$

Da $0 < x < 1$ ist, folgt $0 < u < 1$. Analog kann man $0 < v < 1$ zeigen. Daher folgt $(u, v) \in Q$, d.h. $B_r(x, y) \subset Q$. Wir folgern, dass Q offen ist.

2. Sei $Q := (0,1) \times [0,1) \subset \mathbb{R}^2$. Q ist

(a) offen.

(b) abgeschlossen.

√ (c) keine der vorherigen Antworten ist korrekt

Sei $0 < t < 1$. Dann ist $(t, 0)$ in Q. Wir nehmen an, dass es ein $r > 0$ mit $B_r(t, 0) \subset Q$ gibt. Wir betrachten nun $\left(t, -\frac{r}{2}\right)$. Es ist klar, dass $\left(t, -\frac{r}{2}\right) \in B_r(t, 0)$ ist. Andererseits gilt $\left(t, -\frac{r}{2}\right) \notin Q$. Wir folgern, dass ein solches r nicht existieren kann und Q nicht offen ist.

Wir nehmen jetzt an, dass Q abgeschlossen ist. Deshalb wissen wir, dass Q^c offen ist. Aber die vorherige Argumentation liefert auch in diesem Fall einen Widerspruch und darum kann Q nicht abgeschlossen sein. Somit ist Antwort (c) richtig.