D-ITET Analysis II FS 2016
Prof. A. Iozzi

Online-Serie 10

Einsendeschluss: **Mittwoch, 18. Mai 2016, 20:00 Uhr**

---

1. Welche der folgenden Kurven ist die längste?

√ (a) Der Graph der Funktion $g_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^2$.

(b) Der Graph der Funktion $g_2 \colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^3$.

(c) Der Graph der Funktion $g_3 \colon [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{3}{2}x^4$.

Die Kurvenlänge von Graph(g_i) ist gleich dem Integral

$$\int_0^1 \sqrt{1 + |g_i'(x)|^2}\, dx.$$

Wir berechnen daher $g_1'(x) = 6x$ und $g_2'(x) = 6x^2$ und $g_3'(x) = 6x^3$. Für $x \in [0,1]$ gilt aber $x \geq x^2 \geq x^3 \geq 0$ und somit $|g_1'(x)| \geq |g_2'(x)| \geq |g_3'(x)|$. Also ist das Integral für $i = 1$ am grössten, und Antwort (a) ist richtig.

2. Die Länge der Graph der Funktion

$$[a,b] \ni x \overset{f}{\mapsto} f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ist...

(a) $b - a$.

(b) $e^b - e^a$.

√ (c) $\frac{e^b - e^{-b} - e^a + e^{-a}}{2}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} L(\mathrm{Graph}(f)) &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx \\ &= \int_a^b \cosh x\, dx \\ &= \sinh x \Big|_a^b \\ &= \frac{e^b - e^{-b} - e^a + e^{-a}}{2}. \end{aligned}$$

3. Die Länge der Kurve

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ni t \overset{f}{\mapsto} f(t) = \left(\frac{1}{4}\cos(2t), \cos^3 t, \sin^3 t\right)$$

ist...

✓ (a) $\sqrt{10}$

(b) 1.

(c) 2.

(d) π.

Es gilt

$$f'(t) = \left(-\frac{1}{2}\sin(2t), -3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t\right)$$

und somit

$$||f'(t)||^2 = 10\cos^2 t \sin^2 t = \frac{5}{2}\sin^2(2t)\,.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\frac{5}{2}}\,|\sin(2t)|\,dt \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{5}{2}}\,\sin(2t)\,dt \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}}\,\cos(2t)\Big|_{\pi/2}^{0} \\ &= \sqrt{10}\,. \end{aligned}$$