D-ITET | Analysis II | FS 2016
Prof. A. Iozzi

Online-Serie 11

Einsendeschluss: **Mittwoch, 25. Mai 2016, 20:00 Uhr**

---

1. Welches der folgenden Vektorfelder hat ein Potential?

(a) Das Vektorfeld $(x-y,\, x-y)$ hat ein Potential.

(b) Das Vektorfeld $(x^2-y,\, x^3+2xy)$ hat ein Potential.

√ (c) Das Vektorfeld $(x^3+2xy,\, x^2-y)$ hat ein Potential.

(d) Das Vektorfeld $(x^3-xy^2,\, x^2y-y^5)$ hat ein Potential.

Für ein Vektorfeld $\mathbf{K}: G \to \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\mathbf{K}$ ist konservativ.

b) Für je zwei Wege γ_1 und γ_2 in G mit demselben Anfangspunkt und demselben Endpunkt gilt

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{K} \cdot dx = \int_{\gamma_2} \mathbf{K} \cdot dx$$

c) Für alle geschlossenen Kurven $\gamma \subset G$ gilt:

$$\int_{\gamma} \mathbf{K} \cdot dx = 0.$$

Ein Vektorfeld auf einem zusammenhängenden Gebiet ist genau dann konservativ, wenn es ein Potential besitzt. Ein C^1-Vektorfeld $\mathbf{K} = (P, Q)$ auf $\mathbb{R}^2$ besitzt ein Potential genau dann, wenn $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ist. Diese partiellen Ableitungen sind im Fall (a) gleich $-1 \neq 1$, im Fall (b) gleich $-1 \neq 3x^2 + 2y$, im Fall (c) gleich $2x = 2x$, und im Fall (d) gleich $-2xy \neq 2xy$. Also lautet die richtige Antwort (c). Das zugehörige Potential ist in diesem Fall gleich $\frac{x^4}{4} + x^2y - \frac{y^2}{2} + c$ für eine beliebige Konstante c.

2. Das Vektorfeld $\mathbf{K}(x,y) = (e^x \sin(y), e^x \cos(y))$ ist

(a) nicht konservativ.

$\surd$ (b) konservativ.

Analog wie oben sehen wir, dass $\mathbf{K}$ konservativ ist.

3. Die Länge der Kurve

$$[0,1] \ni t \overset{f}{\mapsto} f(t) = \left(t-1, 1-t^2, 2+\frac{2}{3}t^3\right)$$

ist...

(a) $\frac{8}{3}$

$\surd$ (b) $\frac{5}{3}$

(c) 1.

(d) $\frac{1}{2}$.

Es gilt

$$f'(t) = \big(1, -2t, 2t^2\big)$$

und somit

$$||f'(t)||^2 = 1 + 4t^2 + 4t^4 = (1+2t^2)^2\,.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^1 |2t^2+1|\,dt \\ &= \int_0^1 (2t^2+1)\,dt \\ &= \left(\frac{2}{3}t^3 + t\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{3}\,. \end{aligned}$$