Online-Serie 12

Einsendeschluss: **Mittwoch, 01. Juni 2016, 20:00 Uhr**

---

1. Die Divergenz des Vektorfelds

$$K(x,y) = \left(x^3 + \cos y, \frac{e^y + xy}{1+x^2}\right)$$

ist...

(a) $x^3 + \cos y + \frac{e^y+xy}{1+x^2}$.

(b) $-\sin y + \frac{y-yx^2-2xe^y}{(1+x^2)}$.

(c) $x^3 + \cos y - \frac{e^y+xy}{1+x^2}$.

√ (d) $\frac{3x^2+3x^4+x+e^y}{1+x^2}$.

Für ein Vektorfeld $K(x,y)$ gilt definitionsgemäss

$$\mathrm{div}K = \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y}\,.$$

Daher folgt direkt

$$\frac{\partial K_1}{\partial x} = 3x^2$$

und

$$\frac{\partial K_2}{\partial y} = \frac{e^y + x}{1+x^2}\,.$$

Wir schliessen

$$\mathrm{div}K = 3x^2 + \frac{e^y+x}{1+x^2} = \frac{3x^2+3x^4+x+e^y}{1+x^2}\,.$$

Somit ist (d) die richtige Antwort.

2. Gegeben seien das Bereich

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 < x < 1,\ 0 < y < -x^2 + 1 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$K := \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} + y \\ e^{x^2} \end{pmatrix}.$$

Der Fluss von K durch den Rand ∂B von innen nach aussen ist...

√ (a) 0.

(b) $-2/3$.

(c) -1.

(d) $2/5$.

(e) $-2/5$.

Die Divergenz von K ist

$$\mathrm{div} K = K^1_x + K^2_y = x + 0 = x$$

und mit Hilfe des Satzes von Gauss erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_{\partial B} \Big\langle K, N \Big\rangle \, ds = \int_B \mathrm{div} K \, d\mu = \int_{-1}^{1} \int_0^{1-x^2} x \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^{1} x(1-x^2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{1} = 0\,. \end{aligned}$$

Somit ist (a) die richtige Antwort.