Online-Serie 13

Einsendeschluss: **Mittwoch, 08. Juni 2016, 20:00 Uhr**

---

1. Gegeben seien der Vektor $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Funktion $f(x, y, z) = \frac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2)$. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$v = \nabla f + a \times \nabla f \,.$$

Die Divergenz von v ist...

(a) $a_1 x + a_2 y + a_3 z$.

(b) 0.

(c) $a_1 + a_2 + a_3$.

$\surd$ (d) 1.

Wir berechnen zunächst den Gradienten

$$\nabla f = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und erhalten damit

$$v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x + a_2 z - a_3 y \\ y + a_3 x - a_1 z \\ z + a_1 y - a_2 x \end{pmatrix} \,.$$

Somit bekommen wir

$$\operatorname{div} v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1 \,.$$

Somit ist (d) die richtige Antwort.

2. Seien a, f und v wie oben. Der Fluss von v durch die Oberfläche der Einheitskugel um den Ursprung ist...

(a) a_3.

√ (b) $\frac{4}{3}\pi$.

(c) 0.

(d) $a_1 + a_2 + a_3$.

(e) π^2.

Sei $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$. Mit dem Satz von Gauss folgt

$$\int_{\partial B} v \cdot d\omega = \int_B \operatorname{div} v \, dx = \int_B dx = \frac{4}{3}\pi.$$

Somit ist (b) die richtige Antwort.

3. Seien a, f und v wie oben. $\operatorname{rot} v$ ist...

(a) a.

√ (b) $\frac{2}{3}a$.

(c) 0.

(d) ∇f.

(e) $-\nabla f + v$.

Wir erhalten direkt

$$\operatorname{rot} v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \\ 2a_3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} a \, .$$

Somit ist (b) die richtige Antwort.