D-ITET | Analysis II | FS 2016
Prof. A. Iozzi

Online-Serie 2

Einsendeschluss: **Montag, 14. März 2016, 13:00 Uhr**

---

1. Sei $f(x,y) = (x+y)^2$. Die Ableitung von f im Punkt (x,y) in Richtung $v = (1,-1)$ ist

(a) $2x$.

(b) $\sqrt{2}(x+y)$.

✓ (c) 0.

Wir berechnen $||v|| = \sqrt{2}$ und setzen $w = \frac{v}{||v||} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Wir erhalten

$$(D_w f)(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot w = 2(x+y, x+y) \cdot w = 0.$$

Somit ist Antwort (c) richtig.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar. Welcher Ausdruck ist im allgemeinen *nicht äquivalent zu den anderen?*

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$,

(b) $D_{(1,0)} f(x_0, y_0)$,

✓ (c) $D_{(-1,0)} f(x_0, y_0)$,

(d) $-D_{(-1,0)} f(x_0, y_0)$.

Die Ausdrücke (a) und (b) sind nach ihrer Definition äquivalent. Wegen

$$D_{(-1,0)} f(x_0, y_0) = \frac{d}{dt}\big(f(x_0 - t, y_0)\big)\Big|_{t=0} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

ist auch (d) äquivalent zu (a). Die Antwort (c) ist also nicht äquivalent zu den anderen.

3. Wie lautet der Gradient der Funktion $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto xy$?

(a) $\nabla f(x,y) = (x,y)$,

(b) $\nabla f(x,y) = x + y$,

(c) $\nabla f(x,y) = y$,

(d) $\nabla f(x,y) = (0,0)$,

$\checkmark$ (e) $\nabla f(x,y) = (y,x)$.

Der Gradient von f ist definiert als $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$. Ausrechnen ergibt Antwort (e).

4. Für je zwei partiell differenzierbare Funktionen $f,\, g:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

(a) $\nabla(fg) = \nabla f \cdot \nabla g$.

$\checkmark$ (b) $\nabla(fg) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$.

(c) $\nabla(fg) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$, aber nur wenn f und g total differenzierbar sind.

Antwort (b) ist richtig, denn ausgeschrieben ist sie die Gleichung von Vektoren

$$\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}\right)_{i=1}^{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_{i=1}^{n}$$

welche koeffizientenweise gerade auf die Leibnizsche Produktregel für die Ableitung nach einer Variablen hinausläuft. Totale Differenzierbarkeit wird dafür nicht benötigt. Aussage (a) ergibt schon deshalb keinen Sinn, weil auf der rechten Seite ein Produkt von Vektoren steht, das für beliebiges n nicht wieder als Vektor im $\mathbb{R}^n$ interpretiert werden kann.

5. Die Ableitung von $f(x,y) = x - \sin(xy) - \frac{\pi}{4}$ im Punkt $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ in Richtung von $u = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ist

√ (a) $\frac{1}{2}$.

(b) $\frac{\pi}{2}$.

(c) 1.

(d) 0.

Wir berechnen

$$\nabla f(x,y) = (1 - y\cos(xy), -x\cos(xy))$$

und

$$\nabla f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = (1,0)\,.$$

Wir bekommen

$$(D_u f)\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) = \nabla f\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right) \cdot u = \frac{1}{2}.$$

Somit ist Antwort (a) richtig.

6. Die Ableitung von $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$ im Punkt $(1,2)$ in Richtung der Gerade, welche einen 45°-Winkel mit der x-Achse bildet, ist

(a) 1.

(b) π.

√ (c) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$.

(d) $\frac{\pi}{2}$.

Der Vektor u ist gegeben durch $u = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Damit erhalten wir analog wie oben

$$\nabla f(x,y) = (4x - 3y, -3x + 10y)\,,$$

$$\nabla f(1,2) = (-2, 17)$$

und

$$(D_u f)(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot u = \frac{15\sqrt{2}}{2}.$$

Antwort (c) ist also korrekt.