D-ITET | Analysis II | FS 2016
Prof. A. Iozzi

Online-Serie 3

Einsendeschluss: **Montag, 21. März 2016, 13:00 Uhr**

---

1. Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_0, y_0) = a$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ existiert eine lokale Parametrisierung $\varphi(x)$ mit $f(x, \varphi(x)) = a$ und $\varphi(x_0) = y_0$.

√ (a) Diese Aussage folgt aus dem Satz über implizite Funktionen.

(b) Diese Aussage gilt nur für $a = 0$.

(c) Man muss in der Voraussetzung $f_x \neq 0$ verlangen anstatt $f_y \neq 0$.

(d) Man muss in der Voraussetzung zusätzlich $f_x \neq 0$ verlangen.

Die Aussage folgt sofort, wenn man den Satz über implizite Funktionen auf die Funktion $f(x, y) - a$ anwendet. Also ist (a) richtig. Natürlich muss dafür f stetig differenzierbar sein, aber weitere Voraussetzungen sind nicht erforderlich.

2. Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

(a) der minimalen partiellen Ableitung.

(b) entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.

(c) des Gradienten.

√ (d) entgegengesetzt zum Gradienten.

(e) orthogonal zum Gradienten.

Die Frage ist äquivalent dazu, für welchen Einheitsvektor e die Richtungsableitung $D_e f$ am kleinsten, das heisst, am meisten negativ ist. Die Richtungsableitung ist aber gleich $(\nabla f) \cdot e$, und dies wird am kleinsten für $e = -\nabla f \,/\, |\nabla f|$. Die richtige Antwort lautet daher (d).

3. Sei $f(x, y) = \operatorname{arctg}(2x^2 + 3xy - 4y^2)$. Das Taylor Polynom erster Ordnung um den Punkt $(1, 1)$ ist

(a) $\frac{\pi}{2} + \frac{7}{2}\Delta x - \Delta y$,

√ (b) $\frac{\pi}{4} + \frac{7}{2}\Delta x - \frac{5}{2}\Delta y$,

(c) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\Delta x + \frac{3}{2}\Delta y$.

Das Taylor Polynom erster Ordnung von f um den Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$j^1_{(x_0,y_0)} f(\Delta x, \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Der Gradient von f ist

$$\boldsymbol{\nabla} f(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4x + 3y}{1 + (2x^2 + 3xy - 4y^2)^2} \\ \dfrac{3x - 8y}{1 + (2x^2 + 3xy - 4y^2)^2} \end{bmatrix} \tag{1}$$

und hat an der Stelle $(1, 1)$ den Wert

$$\boldsymbol{\nabla} f(1, 1) = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Mit $f(1, 1) = \frac{\pi}{4}$ folgt dann

$$j^1_{(1,1)} f(\Delta x, \Delta y) = \frac{\pi}{4} + \frac{7}{2}\Delta x - \frac{5}{2}\Delta y.$$

4. Sei $f(x, y) = (1 + y)e^x \sin(xy)$. Das Taylor Polynom dritter Ordung um den Punkt $(0, 0)$ ist

(a) $\Delta x + \Delta y + \Delta x\Delta y + \Delta x^2\Delta y + \Delta y^2\Delta x$,

(b) $1 + \Delta y + \Delta x\Delta y + \Delta x\Delta y^2$,

√ (c) $\Delta x\Delta y + \Delta x^2\Delta y + \Delta x\Delta y^2$.

Das Taylor Polynom der Funktion $\sin(z)$ ist $z - \frac{z^3}{6} + \ldots$ und das Taylor Polynom der Funktion e^x ist $1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$. Also haben wir

$$\begin{aligned} j^\infty_{(0,0)} f(\Delta x, \Delta y) &= (1 + \Delta y)\left(1 + \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} + \ldots\right)\left(\Delta x\Delta y - \frac{\Delta x^3\Delta y^3}{6} + \ldots\right) = \\ &= \left(1 + \Delta x + \Delta y + \Delta x\Delta y + \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta x^2\Delta y}{2} + \ldots\right)\left(\Delta x\Delta y - \frac{\Delta x^3\Delta y^3}{6} + \ldots\right) \\ &= \Delta x\Delta y + \Delta x^2\Delta y + \Delta y^2\Delta x + \frac{\Delta x^3\Delta y}{2} + \cdots \end{aligned}$$

Somit ist Antwort (c) richtig.