Online-Serie 4

Einsendeschluss: **Montag, 28. März 2016, 13:00 Uhr**

---

1. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) Jede Funktion auf einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ besitzt ein Maximum.

(b) Jeder nichtausgeartete kritische Punkt ist ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum.

(c) Jedes lokale Minimum ist ein nichtausgearteter kritischer Punkt.

$\surd$ (d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Antwort (a) ist nur richtig für stetige Funktionen. In (b) könnte der Punkt auch ein Sattelpunkt sein. Auch (c) ist falsch, denn jedes lokale Extremum einer differenzierbaren Funktion ist zwar ein kritischer Punkt, aber der kann ausgeartet sein, wie zum Beispiel $x = 0$ für die Funktion $x \mapsto x^4$.

2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion in der Klasse $C^2(\mathbb{R}^2)$ mit einem kritischen Punkt an der Stelle (x_0, y_0). Die Hessesche Matrix $H_m(x_0, y_0)$ ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dann ist (x_0, y_0)

(a) ein lokales Minimum von f.

$\surd$ (b) ein Sattelpunkt von f.

(c) ein lokales Maximum von f.

Wir berechnen $\det(H_m(x_0, y_0))$ und bekommen

$$\det(H_m(x_0, y_0)) = 3 \cdot 8 - 5 \cdot 5 = -1 < 0\,.$$

Somit ist $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0$ und (x_0, y_0) ist ein Sattelpunkt von f. Die richtige Antwort ist (b).

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion in der Klasse $C^2(\mathbb{R}^2)$ mit einem kritischen Punkt an der Stelle $(0,0)$. Wir nehmen an, dass die Eigenwerte von $H_m(0,0)$ die Zahlen 3 und -2 sind. Dann ist $(0,0)$

(a) ein lokales Minimum von f.

(b) ein lokales Maximum von f.

$\checkmark$ (c) ein Sattelpunkt von f.

(d) Man kann den Typ des kritischen Punktes nicht bestimmen.

Wir berechnen $\det(H_m(0,0))$ und bekommen

$$\det(H_m(0,0)) = 3 \cdot (-2) = -6 < 0\,.$$

Somit ist $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) < 0$ und $(0,0)$ ist ein Sattelpunkt von f. Die richtige Antwort ist (c).