D-ITET Analysis II FS 2016
Prof. A. Iozzi

Online-Serie 5

Einsendeschluss: **Mittwoch, 13. April 2016, 20:00 Uhr**

---

1. Für welche Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stimmen Jacobi- und Hessematrix überein?

(a) Nur für die Identität.

(b) Für konstante Funktionen.

(c) Für jede Funktion der Form $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = A + Be^{x+y}$.

√ (d) Für keine.

Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist die Jacobimatrix eine 1×2-Matrix, d.h. ein Zeilenvektor. Hingegen ist die Hessematrix eine 2×2-Matrix. Somit ergibt es keinen Sinn, von Gleichheit der beiden zu sprechen und Aussage (d) ist richtig.

2. Sei

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^r$$

eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $r < n$. Sei weiterhin

$$B := \{x \in U \mid g_1(x) = \ldots = g_r(x) = 0\}\,.$$

Welche Aussage ist richtig?

(a) Jeder kritische Punkt von B ist ein kritischer Punkt von g.

√ (b) Jeder reguläre Punkt von B ist ein regulärer Punkt von g.

(c) Jeder kritische Punkt von B ist ein regulärer Punkt von g.

(d) Keine der Aussagen ist richtig.

Wir können die Funktionalmatrix von g schreiben als

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \vdots \\ \nabla g_r \end{pmatrix}.$$

Nach Definition ist $\xi \in B$ genau dann ein regulärer Punkt, wenn die Vektoren $\nabla g_1(\xi)$, $\ldots$, $\nabla g_r(\xi)$ linear unabhängig sind. Das bedeutet, dass $\nabla g(\xi)$ maximalen Rang $r = \min\{r, n\}$ hat. Das ist wiederum nach Definition gleichbedeutend damit, dass ξ ein regulärer Punkt von g ist. Aussage (b) ist somit richtig. Die Aussagen (a) und (c) ergeben keinen Sinn, weil wir kritische Punkte von Mengen nicht definiert haben.

3. Definiere

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} \\ e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix $\left[\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}\right]$ ist

(a)

$$\left[\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}\right] = \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ e^x & -e^y \end{pmatrix}.$$

√ (b)

$$\left[\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}\right] = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

4. Berechne $f^{-1}(u,v)$ und $\left[\frac{\partial(f_1^{-1},f_2^{-1})}{\partial(u,v)}\right]$. Es gilt

√ (a)

$$f^{-1}(u,v) = \Big(\frac{1}{2}(\ln(u){+}\ln(v)), \frac{1}{2}(\ln(u){-}\ln(v))\Big), \qquad \left[\frac{\partial(f_1^{-1},f_2^{-1})}{\partial(u,v)}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2u} & \frac{1}{2v} \\ \frac{1}{2u} & -\frac{1}{2v} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$f^{-1}(u,v) = \Big(\frac{1}{2}(\ln(u){\cdot}\ln(v)), \frac{1}{2}\frac{\ln(u)}{\ln(v)}\Big), \qquad \left[\frac{\partial(f_1^{-1},f_2^{-1})}{\partial(u,v)}\right] = \begin{pmatrix} \frac{\ln(v)}{2u} & \frac{\ln(u)}{2v} \\ \frac{1}{2u\ln(v)} & -\frac{\ln(u)}{2v\ln^2(v)} \end{pmatrix}.$$

5. In welchen Punkten der u-v–Ebene ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \quad (u,v) \mapsto \big(u^2+2v, 2v^2-u, u+v\big)\,,$$

nicht regulär?

(a) $u=-1$ und $v=\frac{1}{4}$.

(b) $u=0$ und $v=0$.

√ (c) $u=1$ und $v=-\frac{1}{4}$.

(d) $u=0$ und $v>0$.

Die Jacobi-Matrix von f ist

$$\left[\frac{\partial f}{\partial(u,v)}\right] = \begin{bmatrix} 2u & 2 \\ -1 & 4v \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und hat maximalen Rang, wenn ihre Spalten linear unabhängig sind. Deren Kreuzprodukt

$$\begin{bmatrix} 2u \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-4v \\ 2-2u \\ 8uv+2 \end{bmatrix}$$

verschwindet genau dann, wenn gilt

$$u=1 \ \text{ und } \ v=-\frac{1}{4}\,.$$

Genau in diesem Fall sind die Spalten von $\left[\frac{\partial f}{\partial(u,v)}\right]$ linear abhängig und und f ist nicht regulär. Somit ist (c) die richtige Antwort