Online-Serie 6

Einsendeschluss: **Mittwoch, 20. April 2016, 20:00 Uhr**

---

1. Das Integral $\int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y)\,dx\,dy$ ist gleich

(a) 4

√ (b) -4

(c) 0

(d) 2

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y)\,dx\,dy &= \int_0^\pi \sin(x+y)\big|_0^\pi\,dy \\ &= \int_0^\pi (\sin(\pi+y) - \sin(y))\,dy \\ &= (-\cos(\pi+y) + \cos(y))_0^\pi \\ &= -4\,. \end{aligned}$$

2. Sei

$$K = \{(x, y, z) : 2 < x < 4, 1 < y < 2, 0 < z(x + y) < 1\} \ .$$

Das Volumen des Körpers K ist...

(a) $\log\left(\frac{3}{2^2 \cdot 5^5}\right)$

√ (b) $\log\left(\frac{3^9}{2^2 \cdot 5^5}\right)$

(c) π^3

(d) 12

K ist offensichtlich der Kuchen $K_{Q,f}$ zu

$$Q = [2, 4] \times [1, 2]\,, \quad f(x, y) = \frac{1}{x + y} \ .$$

Somit lässt sich das Volumen von K in folgender Weise als Integral darstellen:

$$vol(K) = \int_Q \frac{1}{x + y}\, dy\, dx = \int_2^4 \int_1^2 \frac{1}{x + y}\, dy\, dx \ .$$

Während der Evaluation des inneren Integrals ist x als Konstante zu behandeln. Man erhält

$$\int_1^2 \frac{1}{x + y}\, dy = \log(x + y)\Big|_1^2 = \log(x + 2) - \log(x + 1)$$

und somit weiter

$$vol(K) = \int_2^4 (\log(x + 2) - \log(x + 1))\, dx \ .$$

und

$$vol(K) = 6 \log(6) - 4 \log(4) - 5 \log(5) + 3 \log(3) = \log\left(\frac{3^9}{2^2 \cdot 5^5}\right) \ .$$

3. Wir betrachten die Schar

$$\Gamma: \quad y^2 = cx^3\,.$$

Die Orthogonaltrajektorien von Γ sind

√ (a) $2x^2 + 3y^2 = K$.

(b) $x^2 + y = K$.

(c) $x - y^3 = K$.

(d) $x^2 + y^2 = K$.

Wir "differenzieren" die Gleichung nach x und bekommen

$$2yy' = 3x^2c\,.$$

Wir setzen $c = \frac{y^2}{x^3}$ in dieser Gleichung ein und erhalten somit

$$y' = \frac{3}{2}\frac{x}{y}\,.$$

Die Differenzialgleichung der Orthogonaltrajektorien ist daher

$$y' = -\frac{2}{3}\frac{x}{y}\,.$$

Wir lösen die Gleichung

$$\begin{aligned} 3ydy &= -2xdx \\ \int 3y\,dy &= \int 2x\,dx \end{aligned}$$

und bekommen $2x^2 + 3y^2 = K$. Somit ist (a) die richtige Antwort.