D-ITET | Analysis II | FS 2016
Prof. A. Iozzi

Online-Serie 7

Einsendeschluss: **Mittwoch, 27. April 2016, 20:00 Uhr**

---

1. Welches der folgenden Integrale ist NICHT gleich den anderen? Es ist das Integral

(a) $\int_0^1 \int_0^x x\,dydx$.

√ (b) $\int_0^1 \int_0^y x\,dxdy$.

(c) $\int_0^1 \int_0^y y\,dxdy$.

(d) $\int_0^1 \int_y^1 x\,dxdy$.

In (a) und (d) ist der Integrationsbereich gegeben durch dieselbe Bedingung $0 \leq y \leq x \leq 1$. Da auch der Integrand gleich ist, stimmen diese beiden Integrale überein. Dasselbe gilt für das Integral (c), welches aus (a) durch Vertauschung der Variablen x und y entsteht. Als einzig mögliche korrekte Antwort verbleibt daher (b). Durch direktes Rechnen sehen wir auch, dass die Integrale (a), (c) und (d) gleich $\frac{1}{3}$ sind, wohingegen das Integral (b) gleich $\frac{1}{6}$ ist.

2. Das Integral der Funktion $f(x,y) := \sqrt{4-x^2-y^2}$ über der Menge $B := \{(x,y) \mid x,y \geq 0, x^2+y^2 \leq 4\}$ ist

(a) $\int_B f\,dx\,dy = \frac{2}{3}\pi$.

√ (b) $\int_B f\,dx\,dy = \frac{4}{3}\pi$.

(c) $\int_B f\,dx\,dy = \frac{16}{3}\pi$.

(d) $\int f\,dx\,dy = 8\pi$.

(e) $\int_B f\,dx\,dy = \frac{32}{3}\pi$.

Die Funktion f ist ≥ 0 auf B, und die Menge der Punkte zwischen ihrem Graphen und der xy-Ebene ist ein Viertel der Halbkugel H mit Zentrum 0 und Radius 2. Das Integral berechnet daher das Volumen eines Achtels der Vollkugel mit Radius r; dieses beträgt $\frac{4}{3}\pi r^3$; also gilt $\int_B f\,dx\,dy = \mathrm{vol}(H) = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{4}{3}\pi$.

3. Wir betrachten die Fläche $K = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Der Schwerpunkt S von K ist

√ (a) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) (x, y).

(c) $(0, 0)$.

(d) $(\frac{1}{2}, 0)$.

Definitionsgemäss gilt $S = (x_y, y_s)$, wobei

$$x_s = \frac{\int_K x\, dxdy}{\int_K dxdy}\,, \qquad y_s = \frac{\int_K y\, dxdy}{\int_K dxdy}\,.$$

Offenbar ist $\int_K dxdy = 1$ und

$$\int_K x\, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 x\, dxdy = \int_0^1 \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{2}\,.$$

Daher gilt $x_s = \frac{1}{2}$ und analog $y_s = \frac{1}{2}$.