D-ITET | Analysis II | FS 2016
Prof. A. Iozzi

Online-Serie 8

Einsendeschluss: **Mittwoch, 04. Mai 2016, 20:00 Uhr**

---

1. Wir betrachten

$$K_{a,b} = \left\{(x, y, z) : a \leq z \leq b,\ x^2 + y^2 \leq z^{-2}\right\}$$

mit $0 < a < b$. Das Volumen von $K_{a,b}$ ist...

√ (a) $\pi\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$.

(b) $\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)$.

(c) $\pi(b - a)$.

(d) πab.

Es gilt

$$V(K_{a,b}) = \int_a^b \left(\int_{E(z)} dxdy\right) dz$$

wobei $E(z) = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq z^{-2}\right\}$ ist.

Offenbar gilt

$$\int_{E(z)} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{z^{-1}} r\, dr d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{z^{-2}}{2}\, d\phi = \pi z^{-2}$$

und deshalb bekommen wir

$$V(K_{a,b}) = \int_a^b \pi z^{-2}\, dz = \pi\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

2. Wir betrachten

$$K = \left\{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ x+y \le z \le x^2+y^2+1\right\} .$$

Das Volumen von K ist...

(a) 1.

√ (b) $\frac{2}{3}$.

(c) 2.

(d) π.

Es gilt

$$V(K) = \int_0^1 \int_0^1 \big(1 + x^2 + y^2 - x - y\big)\, dxdy$$

und daher

$$V(K) = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{3} + y^2 - \frac{1}{2} - y\right) dy = \frac{2}{3} .$$

3. Wir betrachten

$$K = \left\{(x,y,z) : 1 \le z \le e,\ \sqrt{x^2+y^2} \le \log z\right\}.$$

Das Volumen von K ist

$$V(K) = \int_1^e \left(\int_{A(z)} dxdy \right) dz$$

wobei

$$A(z) = \{(x,y) : x^2+y^2 \le \log^2 z\}$$

ist. Sei zuletzt

$$B = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}.$$

Dann kann man auch $V(K)$ schreiben als

√ (a) $\int_B \left(e - e^{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdy.$

(b) $\int_B e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$

(c) $\int_0^1 \int_0^1 e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$

√ (d) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 (e - e^r)\, r\, drd\phi.$

Wir können K schreiben als

$$K = \left\{(x,y,z) : e^{\sqrt{x^2+y^2}} \le z \le e,\ x^2+y^2 \le 1\right\}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
V(K) &= \int_B \left(e - e^{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (e - e^r)\, r\, drd\phi \\
&= 2\pi \int_0^1 (er - re^r)\ dr \\
&= \pi(e-2).
\end{aligned}$$

Die Antworten (b) und (c) sind offenbar nicht korrekt und deshalb sind (a) und (d) die richtigen Antworten.