D-ITET | Analysis II | FS 2016
Prof. A. Iozzi

Online-Serie 9

Einsendeschluss: **Mittwoch, 11. Mai 2016, 20:00 Uhr**

---

1. Welches Volumen hat der Schnittkörper der beiden Zylinder

$$Z_1: \ x^2 + y^2 \leq R^2 \quad \text{und} \quad Z_2: \ x^2 + z^2 \leq R^2 \ ?$$

(a) $3R^3$.

(b) $\pi^3 R^3$.

(c) R^3.

√ (d) $\frac{16}{3} R^3$.

Es gilt

$$-R \leq x \leq R\,,$$
$$-\sqrt{r^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$$

und

$$-\sqrt{r^2 - x^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2}$$

Daraus folgt das Volumen

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dz dy dx = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dy dx \\ &= 4 \int_{-R}^{R} R^2 - x^2 \, dx = \left(4R^2 x - \frac{4}{3} x^3 \right) \Big|_{-R}^{R} \\ &= \frac{16}{3} R^3\,. \end{aligned}$$

2. Das Trägheitsmoment einer dünnen Kugelschale mit konstanter Dichte, Dicke ε und äusserem Radius R ist in etwa proportional zu

(a) $R^2\varepsilon^3$.

(b) $R^3\varepsilon^2$.

√ (c) $R^4\varepsilon$.

(d) $R^{9/2}\varepsilon^{1/2}$.

(e) R^5.

Das Trägheitsmoment bei konstanter Dichte ρ ist $\int \rho \cdot (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$. In Kugelkoordinaten transformiert sich das Integral zu $\int \rho \cdot r^2 \cos^2(\vartheta) \cdot r^2 \cos(\vartheta) d\varphi\, d\vartheta\, dr$, wobei über $\varphi \in [-\pi, \pi]$ und $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sowie $r \in [R-\varepsilon, R]$ integriert wird. Die inneren beiden Integrale über φ und ϑ liefern lediglich einen konstanten Faktor. Das verbleibende Integral $\int_{R-\varepsilon}^{R} \rho r^4\, dr$ ist $\approx \rho R^4 \varepsilon$. Also ist (c) richtig.

3. Gegeben sei ein Körper $B \subset \mathbb{R}^3$ mit konstanter Dichte 1. Um welchen Faktor ändert sich das Trägheitsmoment bzgl. der z–Achse, wenn B in x– und y–Richtung jeweils um den Faktor $a > 0$, und in z–Richtung um den Faktor $b > 0$ gestreckt wird (und die Dichte weiterhin gleich 1 ist)?

(a) Es ist der Faktor $a^2 b$.

(b) Es ist der Faktor $a^2 b^2$.

√ (c) Es ist der Faktor $a^4 b$.

(d) Es ist der Faktor $a^3 b^2$.

(e) Es ist der Faktor ab^4.

Der durch die Streckung entstehende Körper ist das Bild von B unter der linearen Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ bz \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung der Substitutionsregel erhalten wir für sein Trägheitsmoment bzgl. der z–Achse

$$\begin{aligned} \Theta_z &= \int_{\Phi(B)} (x^2 + y^2)\, d\mu \\ &= \int_B ((ax)^2 + (ay)^2) |J_\Phi|\, d\mu \\ &= a^4 b \int_B (x^2 + y^2)\, d\mu, \end{aligned}$$

denn die Funktionaldeterminante $|J_\Phi|$ ist konstant gleich $a^2 b$. Das Integral in der letzten Zeile ist gerade das Trägheitsmoment von B bzgl. der z–Achse. Also ist (c) die richtige Antwort.

4. Wir betrachten

$$K = \left\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 2,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 + \sqrt{z}\right\}.$$

Das Volumen von K ist...

√ (a) $4\pi\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$.

(b) π^2.

(c) $\pi + \sqrt{2}$.

(d) $\frac{2\pi}{3}$.

Es gilt

$$V(K) = \int_0^2 \left(\int_{E(z)} dxdy\right) dz$$

wobei $E(z) = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq (1 + \sqrt{z})^2\right\}$ ist.

Offenbar gilt

$$\int_{E(z)} dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\sqrt{z}} r\, dr d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \sqrt{z})^2}{2}\, d\phi = \pi(1 + \sqrt{z})^2$$

und deshalb bekommen wir

$$V(K) = \int_0^2 \pi(1 + \sqrt{z})^2\, dz = \int_0^2 \pi(1 + 2\sqrt{z} + z)\, dz = 4\pi\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right).$$