

1.1. Die Produktmetrik Sei X eine Menge. Eine Metrik $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Abbildung $(x, y) \mapsto d(x, y)$, die die Eigenschaften

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
2. *Symmetrie*: Für alle $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.
3. *Dreiecksungleichung*: Für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

erfüllt.

Es seien jetzt (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Auf dem Produkt $X := X_1 \times X_2$ werde eine Metrik definiert durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$

für $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Man zeige, dass $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ die Axiome einer Metrik erfüllt.

1.2. Partielle Ableitungen Berechne alle partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

- i) $f(x, y) = x$;
- ii) $f(x, y) = e^{xy}$;
- iii) $f(x, y) = x^y$;
- iv) $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$;
- v) $f(x, y) = x^2y \sin(xy)$;
- vi) $f(x, y, z) = xy^2z^3$.

1.3. Stetigkeit Wir betrachten die Funktion

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)(y-1)^3}{(x-1)^2+|y-1|}, & \text{falls } (x, y) \neq (1, 1) \\ -\pi, & \text{falls } (x, y) = (1, 1). \end{cases}$$

Ist g stetig an der Stelle $(1,1)$?

1.4. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

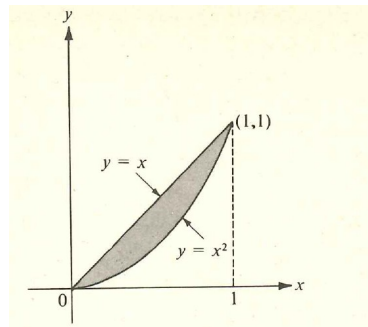
(a) Sei $Q := (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$. Q ist

- i) offen
- ii) abgeschlossen

(b) Sei $Q := (0, 1) \times [0, 1) \subset \mathbb{R}^2$. Q ist

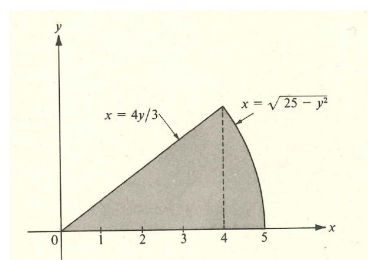
- i) offen
- ii) abgeschlossen
- iii) keine der vorherigen Antworten ist korrekt

(c) Wir betrachten die Menge $\{(x, y) : 0 < x < 1, x^2 < y < x\}$. Hier sind die Werte von y zwischen zwei Funktionen von x eingeschränkt, d.h. $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto x$. Ist es möglich, die abhängige Variable zu ändern?



- i) nein
- ii) ja

(d) Wir betrachten die Menge $\{(x, y) : 0 < x < 4, 0 < y < \frac{3x}{4}\} \cup \{(x, y) : 4 \leq x < 5, 0 < y < \sqrt{25 - x^2}\}$. Ist es möglich, die abhängige Variable zu ändern?



- i) nein
- ii) ja

Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen, sowie die Übungsserien und deren Musterlösungen finden Sie unter

https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/a2_itet/