11.1. Das Potential

Bestimme für folgende Vektorfelder ein Potential, falls ein solches existiert.

(a) $K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y^3 \\ x + 5y \end{pmatrix}$

(b) $K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + 5 \\ 2xy - 8 \end{pmatrix}$

(c) $K(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy + z^2 \\ 2xy \\ xz \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

11.2. Das Potential

Betrachte in der punktierten x-y–Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ das Vektorfeld

$$K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne das Umlaufintegral

$$I := \oint_\gamma K \cdot dx$$

um den Kreis γ mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $M := \binom{0}{0}$.

(b) Zeige durch Konstruktion eines Potentials, dass K konservativ ist.

(c) Verifiziere durch explizite Rechnung, dass K die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} K := \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0$$

erfüllt.

11.3. Satz von Green

Berechne die folgenden Integrale zuerst als Linienintegrale, dann mit Hilfe des Satzes von Green:

(a) $I_a := \oint_{\partial B} \left[xy\, dx + x^2\, dy \right]$ mit $B := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^{2/3} \right\}$

(b) $I_b := \oint_{\partial B} [\, y\, dx + \sin(x)\, dy \,]$ mit $B := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},\ -1 \le y \le \cos(x) \right\}$

Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen, sowie die Übungsserien und deren Musterlösungen finden Sie unter

https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/a2_itet/