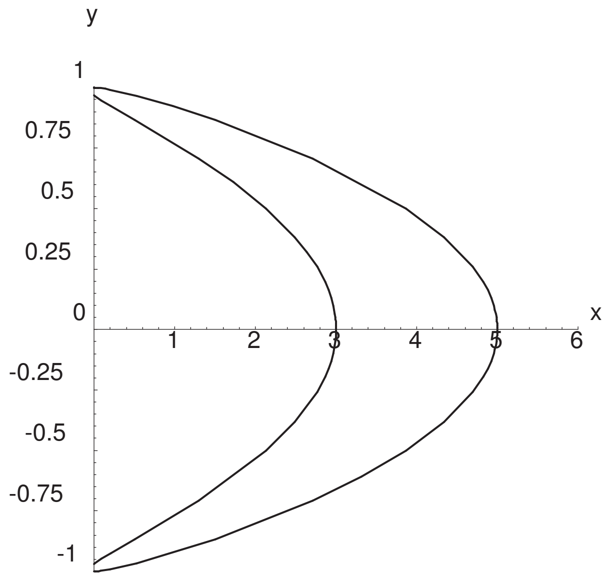
12.1. Satz von Green

Die Randkurve ∂B des Bumerangs B, (siehe die Zeichnung unten) kann parametrisiert werden durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cos^2(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad t \in [\,0, 2\pi).$$



Bestimme den Schwerpunkt von B.

Hinweis: Berechne das Integral

$$\int_B x\,dx\,dy$$

mit Hilfe eines geeignet gewählten Vektorfeldes $K = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mit $Q_x - P_y \equiv x$.

Benutze ferner die Integrale

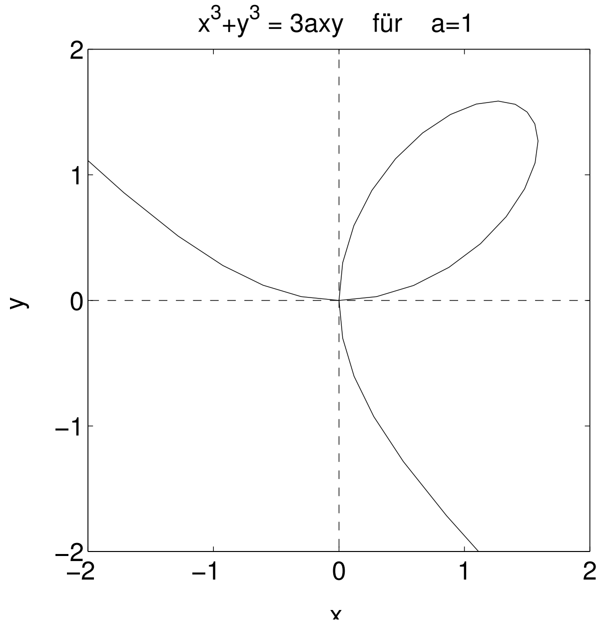
$$\int_0^{2\pi} \cos^4(t)\,dt = \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}(t)\,dt = 0 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

12.2. Satz von Green

Es sei $a > 0$ ein Parameter. Betrachte das kartesische Blatt, welches durch die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

gegeben ist.



Bestimme den Flächeninhalt der geschlossenen Schleife.

Hinweis: Finde eine Parametrisierung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ der Kurve durch den Ansatz $y = tx$. Bestimme den Bereich, den der Parameter t in der Schleife durchläuft. Drücke den Flächeninhalt mit dem Satz von Green durch ein Linienintegral aus.

12.3. Satz von Gauss

Gegeben seien das Dreieck

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$K := \begin{pmatrix} 2xy - y^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Berechne den Fluss von K durch den Rand ∂B von innen nach aussen

(a) als Flussintegral,

(b) mit Hilfe des Satzes von Gauss.

Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen, sowie die Übungsserien und deren Musterlösungen finden Sie unter

https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/a2_itet/