13.1. Operationen auf Vektor- und Skalarfeldern

Seien f ein Skalarfeld und $K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ und $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$, jeweils hinreichend oft stetig differenzierbar.
Der *Gradient* von f ist das Vektorfeld $\operatorname{grad} f := \nabla f$.
Die *Rotation* von K ist das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} K := \nabla \times K = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_3}{\partial y} - \frac{\partial K_2}{\partial z} \\ \frac{\partial K_1}{\partial z} - \frac{\partial K_3}{\partial x} \\ \frac{\partial K_2}{\partial x} - \frac{\partial K_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Die *Divergenz* von K ist das Skalarfeld

$$\operatorname{div} K := \nabla \cdot K = \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{\partial K_3}{\partial z}.$$

Formuliere und beweise koordinatenfreie Identitäten der Form

$$\operatorname{rot}(fK) = (\operatorname{grad} f) \times K + f \cdot \operatorname{rot} K.$$

(a) $\operatorname{div}(fK) = \nabla f \cdot K + f \cdot \operatorname{div} K$

(b) $\operatorname{div}(K \times L) = L \cdot \operatorname{rot} K - K \cdot \operatorname{rot} L$

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \ \dots$

(d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} K) = \ \dots$

(e) $\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{rot} K) = \ \dots$

13.2. Der Flächeninhalt

Berechne die Oberfläche des Teils der oberen Hemisphäre

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ z \geq 0 \right\},$$

der vom Zylinder

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \right\}$$

ausgeschnitten wird.

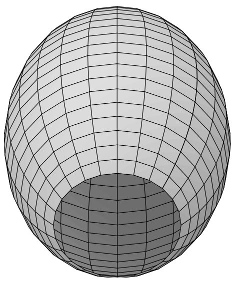
13.3. Integralsätze im $\mathbb{R}^3$

Ein Heissluftballon habe die Form einer Sphärenkappe vom Radius $R > 0$ und Öffnungsdurchmesser $0 < d < 2R$ gemäss Figur. Das heisse Gas dringt durch die poröse Oberfläche B mit der Geschwindigkeit

$$v = \operatorname{rot} F, \quad \text{wobei} \quad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man berechne den Fluss $\int\limits_B v \cdot \mathrm{d}\vec{\omega}$ durch die Ballonoberfläche B:

1. mit direkten Rechnungen;
2. mit Hilfe des Satzes von Gauss;
3. mit Hilfe des Satzes von Stokes.



Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen, sowie die Übungsserien und deren Musterlösungen finden Sie unter

https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/a2_itet/