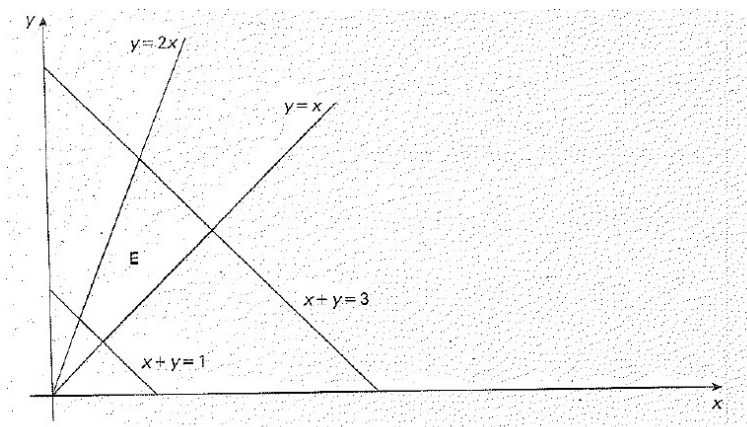


2.1. y -einfach und x -einfach Bereiche Wir betrachten die Menge

$$E := \{(x, y) : x < y < 2x, 1 < x + y < 3\}.$$

- (a) Schreiben Sie diese Teilmenge von \mathbb{R}^2 als ein y -einfacher Bereich, falls möglich.
- (b) Schreiben Sie diese Teilmenge von \mathbb{R}^2 als ein x -einfacher Bereich, falls möglich.



2.2. y -einfach und x -einfach Bereiche Wir betrachten die Menge

$$E := \{(x, y) : x > 0, |y| < x, x^2 + y^2 < 1\}.$$

- (a) Zeichnen Sie das Bild der Menge.
- (b) Schreiben Sie diese Teilmenge von \mathbb{R}^2 als ein y -einfacher Bereich, falls möglich.
- (c) Schreiben Sie diese Teilmenge von \mathbb{R}^2 als ein x -einfacher Bereich, falls möglich.

2.3. Die Kettenregel Sei $x(t) = \cos \pi t$ und $y(t)$ die Stammfunktion von e^{-t^2} , die an der Stelle $t = 1$ den Wert 42 annimmt. Weiterhin sei $f(x, y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie die Ableitung

$$\left. \frac{d}{dt} (f(x(t), y(t))) \right|_{t=1}$$

der Funktion $t \mapsto f(x(t), y(t))$ im Punkt $t = 1$.

2.4. Vertauschung von Ableitung und Integral Die Funktion

$$t \mapsto F(t)$$

sei gegeben durch

$$F(t) = \int_{2t+1}^{t^2+2} \frac{e^{tx} \sqrt{1+t^2x}}{x(x+1)} dx.$$

Berechnen Sie $\dot{F}(0)$.

2.5. Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass $D_x f$ an der Stelle $(0, 0)$ nicht stetig ist.

2.6. An der Stelle $P = (x_0, y_0)$ biegt der Bergweg um: Richtung Südost geht es mit 50% Steigung bergan, Richtung Süd geht es mit 10% Gefälle bergab. Der Wanderer im Nebel möchte möglichst rasch zum Gipfel. In welcher Richtung muss er gehen, und wie steil ist es da?

2.7. Online-Aufgaben

Es sind jeweils mehrere Antworten möglich.

(a) Sei $f(x, y) = (x+y)^2$. Die Ableitung von f im Punkt (x, y) in Richtung $v = (1, -1)$ ist

i) $2x$

ii) $\sqrt{2}(x+y)$

iii) 0

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar. Welcher Ausdruck ist im allgemeinen *nicht äquivalent zu den anderen*?

i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

ii) $D_{(1,0)}f(x_0, y_0)$

iii) $D_{(-1,0)}f(x_0, y_0)$

iv) $-D_{(-1,0)}f(x_0, y_0)$

(c) Wie lautet der Gradient der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$?

i) $\nabla f(x, y) = (x, y)$

ii) $\nabla f(x, y) = x + y$

iii) $\nabla f(x, y) = y$

iv) $\nabla f(x, y) = (0, 0)$

v) $\nabla f(x, y) = (y, x)$

(d) Für je zwei partiell differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

i) $\nabla(fg) = \nabla f \cdot \nabla g$

ii) $\nabla(fg) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$

iii) $\nabla(fg) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$, aber nur wenn f und g total differenzierbar sind

(e) Die Ableitung von $f(x, y) = x - \sin(xy) - \frac{\pi}{4}$ im Punkt $(1, \frac{\pi}{2})$ in Richtung von $u = (\cos(\frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{3})) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ist

i) $\frac{1}{2}$

ii) $\frac{\pi}{2}$

iii) 1

iv) 0

(f) Die Ableitung von $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$ im Punkt $(1, 2)$ in Richtung der Gerade, welche einen 45° -Winkel mit der x -Achse bildet, ist

i) 1

ii) π

iii) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$

iv) $\frac{\pi}{2}$

Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen, sowie die Übungsserien und deren Musterlösungen finden Sie unter

https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/a2_itet/