3.1. Lösungsmenge und Ableitungen

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$F(x, y) = 4(x + y) - x^2 + 2y \arctan(y) - \log(y^2 + 1)$$

(a) Begründen Sie, dass die Lösungsmenge der Gleichung $F(x, y) = 0$ überall lokal der Graph einer Funktion $y = y(x)$ ist.

(b) Geben Sie die Ableitung y' an.

(c) Bestimmen Sie $y''(x)$ für die kritischen Punkte x von y.

3.2. Lösungsmenge und Ableitungen

Die Funktion $F(x, y)$ sei gegeben durch

$$F(x, y) := \mathrm{e}^y + y + \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\,.$$

(a) Zeige, dass die Lösungsmenge der Gleichung $F(x, y) = 0$ überall lokal der Graph einer Funktion $y = y(x)$ ist.

(b) Hat die Funktion $y(x)$ lokale Extrema? Handelt es sich dabei um lokale Maxima oder Minima?

3.3. Taylor-Entwicklung

Man berechne die Taylorpolynome ersten und zweiten Grades der folgenden Funktionen um den angegebenen Punkt und approximiere damit den Funktionswert an den angegebenen Approximationspunkten. Vergleiche das Resultat mit den tatsächlichen Funktionswerten.

(a) $f(x, y) = e^x \sin y$ um $P = (0, \pi/2)$.
Approximationspunkt: $(0, \pi/2 + 1/4)$.

(b) $f(x, y) = e^{x/y}$ um $P = (1, 1)$,
Approximationspunkt: $(5/4, 1/2)$.

(c) Wie genau ist die Approximation der linearen Taylorentwicklung aus a) auf dem Ball $B_{1/4}(0, \pi/2)$? Bestimme eine Schranke für den entstehenden Fehler.

(d) Bestimme einen Radius r, so dass der Approximationsfehler der linearen Taylorentwicklung auf dem Ball $B_r(0, \pi/2)$ höchstens 10^{-4} beträgt.

Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen, sowie die Übungsserien und deren Musterlösungen finden Sie unter

https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/a2_itet/