

5.1. Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren das achsenparallele Rechteck größter Fläche, das sich in die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

einbeschreiben läßt.

Berechnen Sie die Fläche und vergleichen Sie mit der Fläche der Ellipse.

5.2. Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Finde das Maximum der Funktion $f(x, y, z) := x$ auf der durch die Gleichungen $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ definierten Kurve mit

$$F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) := x^3 + y^3 + z^3.$$

Benutze dazu die Methode der LAGRANGE-Multiplikatoren.

Hinweis: Es ist nicht nötig, die Kurve selbst zu beschreiben oder zu parametrisieren.

5.3. Die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f(x, y, z) := x - y - z$$

auf der Schnittkurve des elliptischen Zylinders $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ mit der Ebene $3x - 4z = 0$.

5.4. Die Jacobi-Determinante

Die Abbildung

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto y := f(x),$$

für eine geeignete offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$y_i := \frac{x_i}{1 - x_1 - x_2 - x_3}, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Berechne die Jacobi-Determinante $J_f(x)$.

5.5. Die Jacobi-Matrix

Wir betrachten die Abbildungen

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + e^y \\ x + y \\ y \end{pmatrix}$$

und

$$\beta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v, w) \mapsto \begin{pmatrix} uv \\ w \end{pmatrix}.$$

Sei $\gamma = \beta \circ \alpha$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von γ .

5.6. Die Jacobi-Matrix

Wir betrachten die differenzierbaren Abbildungen

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \\ h(u, v) \end{pmatrix}$$

und

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \Phi(x, y, z) = w.$$

Berechnen Sie $\frac{\partial w}{\partial u}$ und $\frac{\partial w}{\partial v}$.

Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen, sowie die Übungsserien und deren Musterlösungen finden Sie unter

https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/a2_itet/