

6.1. x -einfacher Bereich

Seien $a, b > 0$ mit $a > b$. Wir betrachten die Menge

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, bx < y < ax, x^2y < 1\}.$$

Schreiben Sie E als x -einfachen Bereich.

6.2. Mehrfache Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integralen:

(a) $\int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dx dy,$

(b) $\int_0^1 \int_0^1 (x^3 + 3x^2y + y^3) dx dy,$

(c) $\int_1^3 \int_0^1 (\sqrt{y} + x - 3xy^2) dx dy,$

(d) $\int_0^\pi \int_0^\pi \sin^2(x) \sin^2(y) dx dy,$

(e) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dx dy,$

(f) $\int_0^1 \int_0^1 (e^x + e^y) dy dx,$

6.3. Die Jacobi-Determinante

Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \cos(\phi) \\ r \cos(\theta) \sin(\phi) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

(a) Erkläre die Bedeutung von f und beschreibe das Bild für festes r .

(b) Berechne die Funktionalmatrix von f .

(c) Berechne die Funktionaldeterminante.

6.4. Die Kettenregel

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix},$$

sowie die Projektion auf die (y, z) -Ebene

$$\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechne die Funktionalmatrix von $\Pi \circ \mathbf{f}$ mittels expliziter Berechnung von $\Pi \circ \mathbf{f}$.
- (b) Berechne nochmals diese Funktionalmatrix mit Hilfe der (mehrdimensionalen) Kettenregel.
- (c) In welchen Punkten (u, v) ist $\Pi \circ \mathbf{f}$ nicht regulär?

6.5. Orthogonaltrajektorien

Wir betrachten die Schar

$$\Gamma : y = \frac{1}{x + c}.$$

Berechnen Sie die Orthogonaltrajektorien von Γ .

Informationen zur Vorlesung und zu den Übungen, sowie die Übungsserien und deren Musterlösungen finden Sie unter

https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/a2_itet/