

Anwendungsübungen MATL

1. Aufgabe (Berechnung dreidimensionaler Flächen)

Übliche Softwarepakete zur Erstellung von 3D-Grafiken¹ kennen einige Standardobjekte (Abbildung 1), aus denen kompliziertere Strukturen (Abbildung 2) aufgebaut werden können.



Abbildung 1: Superellipsoid, Blob und Metaball

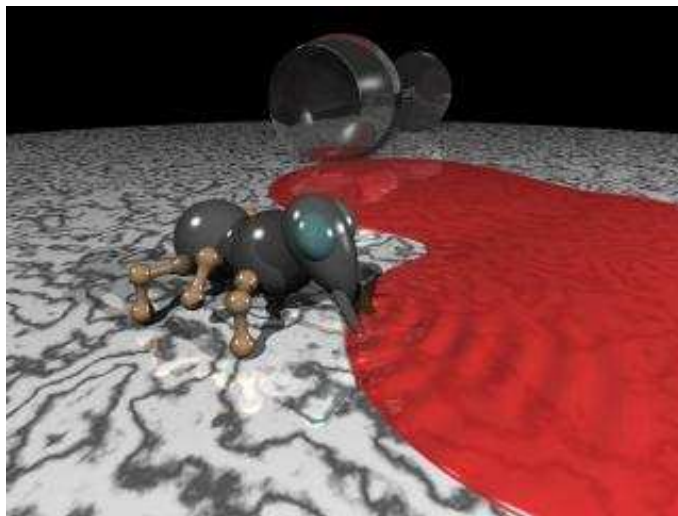


Abbildung 2: Ameise aus Blobs und Metabällen

Standardoberflächen wie in Abbildung 1 werden fast immer als Niveauflächen einer bestimmten Funktion von drei Variablen definiert. Die Punkte des Superellipsoides (SE) beispielsweise erfüllen die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n - 1 = 0, \quad (1)$$

¹z.B. die Freeware *Persistence of Vision Raytracer* (POVRAY), siehe <http://www.povray.org/>

wobei a, b, c positiv und $n \geq 2$ eine gerade Zahl ist.

Um eine eigene Oberfläche zu erstellen, muss man deren geometrische Eigenschaften natürlich erst berechnen, bevor man sie programmieren kann; in dieser Aufgabe soll das am Beispiel des SEs geschehen.

- a) Wie ist das SE im Raum positioniert, d.h. wie liegen die Achsen und wo ist der Ursprung/Mittelpunkt?
- b) Wie gross ist die Ausdehnung des SEs, d.h. wo sind die Punkte mit der jeweils kleinsten bzw. grössten x -, y - und z -Koordinate?
- c) Wie lautet der Normalenvektor des SEs an einem Punkt (x, y, z) ? Wie verhält er sich für $n \rightarrow \infty$? Was bedeutet dieses Ergebnis?
- d) Betrachten wir den Spezialfall $a = b = c = 1$ und $n = 20$. In welchen Stellen auf der xz - bzw. yz -Ebene ist die Steigung des SEs in Richtung der x - bzw. y -Achse genau 45° ? (Fertige eine Skizze an.)

2. Aufgabe (Zuverlässigkeitsrechnung)

Aufgabe der Zuverlässigkeitsrechnung ist es, statistische Aussagen über die Lebensdauer (d.h. Funktionsdauer) von Gebrauchsgegenständen zu machen. Im konkreten Fall funktioniert das so: aus gemessenen Daten über die Lebensdauer eines Gerätes wird eine Dichtefunktion f hergeleitet, deren Variable die Zeit t ist. Das Integral $\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$ liefert dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gerät im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ kaputt geht.

Die folgende Abbildung zeigt eine Dichtefunktion, welche die Lebensdauer von Glühbirnen beschreibt. (p steht für Wahrscheinlichkeit und liegt zwischen 0 und 1).

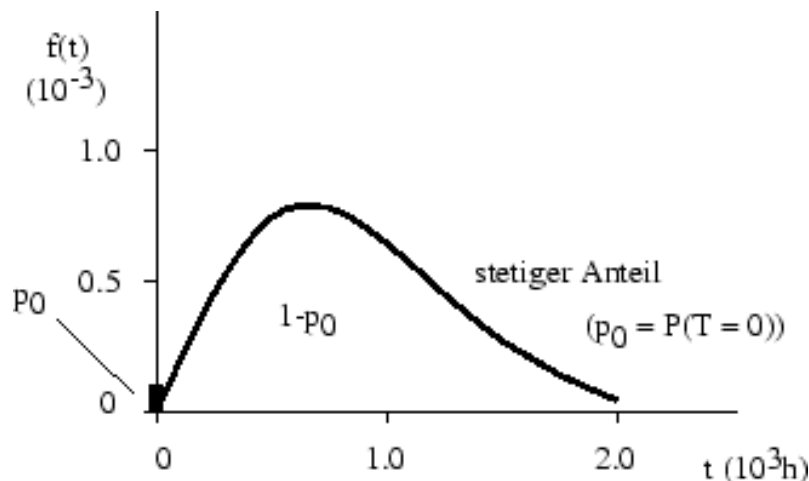


Abbildung 3: Dichtefunktion für die Lebensdauer von Glühbirnen

- a) Interpretiere Abbildung 3. Erkläre insbesondere was an der Stelle $t = 0$ passiert, und warum $1 - p_0$ unter dem Graphen der Dichtefunktion steht.

Aus Messdaten über die Lebensdauer eines Gerätes erstellt man statt der Dichte oft deren Stammfunktion bezüglich der Zeit, die *Verteilungsfunktion* $F(t) = \int_0^t f(t) dt$. Sehr häufig benutzt man die sogenannte *Gamma-Verteilung*, das ist

$$F(t) = \frac{\Gamma\left(\alpha, \frac{t}{\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (2)$$

Hierbei sind α, β positive Zahlen; und es ist $\Gamma(x, t) := \int_0^t y^{x-1} e^{-y} dy$ die *unvollständige* Gammafunktion und $\Gamma(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(x, t)$ die *Gammafunktion*.

- b) Wie lautet die Dichtefunktion von (2)? Skizziere sie für einige Werte von α und β . Berechne den Startwert $f(0)$ für $\alpha = 1$.
- c) Wie würde die Dichtefunktion von (2) lauten, wenn wir die unvollständige Gammafunktion im Zähler durch die Verallgemeinerung $\Gamma(\alpha, g(t))$ ersetzen, wobei g eine stetig differenzierbare Funktion ist? Was ist nun $f(0)$ im Falle von $\alpha = 1$?

3. Aufgabe (Anschauliche Bedeutung der Divergenz)

Sieht man ein Vektorfeld als Strömung an, dann ist die Divergenz ein Mass für die Änderung der Strömungsstärke (in Strömungsrichtung). Dazu stellt man sich ein kleines, durchlässiges Kästchen vor, das in die Strömung gelegt wird: fliesst mehr hinaus als hinein, ist die Strömung offenbar stärker geworden (die Divergenz ist im Kästchen positiv). Entsprechend, wenn weniger aus dem Kästchen hinaus- als hineinströmt, wird die Strömung abgeschwächt (die Divergenz ist im Kästchen negativ).

- a) Schätze, ob die Divergenz der Vektorfelder in Abbildung 4 im jeweils markierten Punkt jeweils positiv, negativ oder Null ist (mit Begründung).

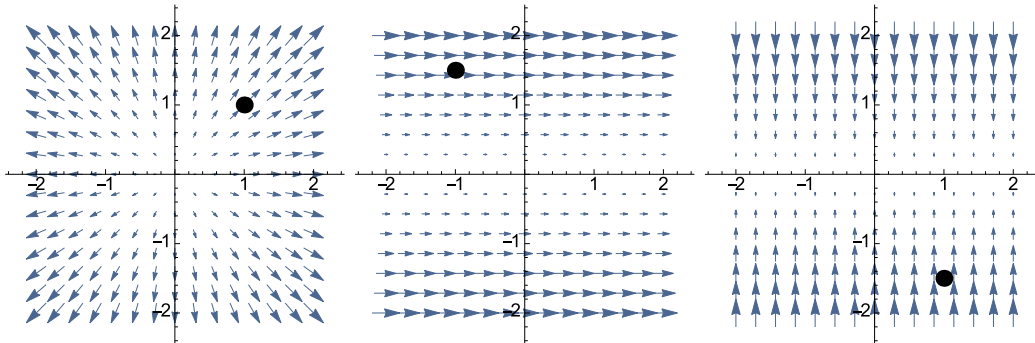


Abbildung 4: Drei einfache Vektorfelder

Unter anderem bestimmt natürlich die Längenänderung der Vektoren in der Umgebung eines Punktes die dortige Änderung der Strömungsstärke. Der genaue Zusammenhang soll am Beispiel des Vektorfelds

$$V(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^k} \cdot (x, y)$$

untersucht werden (hierbei ist $k \geq 0$).

- b) Skizziere V für verschiedene k .
- c) Experimentiere und finde heraus, was eine Variation von k bewirkt. Gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen der Länge der Vektoren und der Divergenz von V ?

4. Aufgabe (Elektrischer Fluss)

Ein elektrisch geladenes Objekt (z.B. Elektron, Kondensator oder Katzenfell) erzeugt ein sogenanntes *elektrisches Feld* im Raum (kurz: E-Feld). Bringt man ein zweites geladenes Objekt in dieses Feld, so stellt sich eine Kraftwirkung ein (gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, entgegengesetzte ziehen sich an). Die Richtung dieser Kraft wird durch sogenannte *elektrische Feldlinien* bestimmt. In der Abbildung 5 sieht man

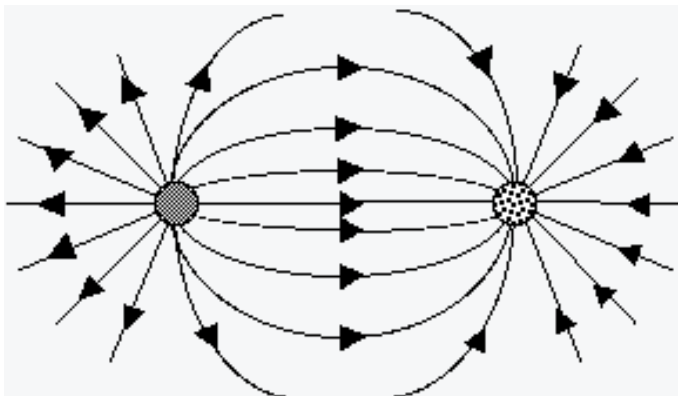


Abbildung 5: Elektrisches Feld zwischen positiver und negativer Ladung

links eine positive, rechts eine negative Ladung; und die Feldlinien des E-Felds, das zwischen den beiden (gleich starken) Ladungen herrscht. Die Pfeile auf den Feldlinien zeigen (konventionsgemäss) immer von der positiven zur negativen Ladung. Mathematisch gesehen ist das E-Feld ein Vektorfeld, und die elektrischen Feldlinien sind genau die Feldlinien dieses Vektorfelds.

- a) Skizziere das E-Feld (also die Vektorpfeile) von Abbildung 5.

Ein fundamentaler Begriff der Elektrostatik ist der *elektrische Fluss*, der ein Mass für die Stärke des E-Felds darstellt. Anschaulich beschreibt der elektrische Fluss, wieviel Feldlinien durch eine bestimmte geschlossene Oberfläche quellen. Mathematisch gesehen ist der elektrische Fluss das Integral des E-Felds über eine geschlossene Oberfläche.

Das E-Feld einer punktförmigen Ladung, die im Nullpunkt sitzt, lautet

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{|(x, y, z)|^3} \cdot (x, y, z), \quad (3)$$

wobei q konstant ist (und die Ladungsgrösse beschreibt). Der elektrische Fluss dieses Felds soll nun untersucht werden.

- b) Berechne den elektrischen Fluss von (3) für drei verschiedene geschlossene Oberflächen (z. B. Kugeln verschiedener Radien; Ellipsoide; Zylinder), wobei die Ladung jeweils *im Inneren* des von der Oberfläche eingeschlossenen Volumens sein soll. Was fällt auf? Kann man den Satz von Gauss benutzen? Gibt es eine anschauliche Erklärung?

- c) Gleiche Aufgabe wie **(b)**, wobei jetzt die Ladung *ausserhalb* des Volumens liegen soll, über dessen Oberfläche integriert wird.
- d) Wir betrachten jetzt einen allgemeineren Fall (siehe Abbildung 6). Das Volumen V , das im grösseren Volumen W liege, enthalte viele Ladungen (in der Abbildung als Punkte angedeutet), von denen jede ein E-Feld der Form (3) erzeuge. Für $j = 1, \dots, n$ gehört also zur j -ten Ladung q_j im Punkt (x_j, y_j, z_j) das E-Feld

$$\vec{E}_j(x, y, z) = \frac{q_j}{|(x - x_j, y - y_j, z - z_j)|^3} \cdot (x - x_j, y - y_j, z - z_j).$$

Ausserhalb von V seien keine Ladungen. Wie verhalten sich die elektrischen Flüsse

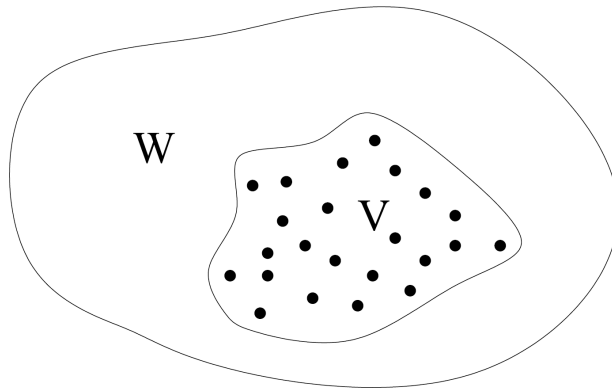


Abbildung 6: Allgemeiner Fall mit n Ladungen

durch die Oberflächen von V und W zueinander? Was vermutet man aufgrund von **b)**? Beweis?

Hinweis: Wende den Satz von Gauss für ein passendes Volumen an.

5. Aufgabe (Thermodynamische Potentiale)

Ein ideales Gas gehorcht zwei fundamentalen Gleichungen. Eine davon ist die *thermische Zustandsgleichung*, die für n Mole eines idealen Gases wie folgt lautet:

$$pV = nRT.$$

Hierbei ist p der Druck des Gases und V das Volumen, in welchem sich das Gas befindet. Weiter ist R eine Naturkonstante und T die Temperatur des Gases.

Die zweite Gleichung, welche ein ideales Gas erfüllt, ist die *kalorische Zustandsgleichung*

$$E = \frac{3}{2}nRT,$$

wobei E als *innere Energie* des Gases bezeichnet wird und gleich der Summe der kinetischen Energien aller Gasteilchen ist.

Eine weitere fundamentale, aber nicht sehr anschauliche Grösse der Thermodynamik ist die *Entropie* S , die man sich am ehesten als ein Mass für die Unordnung in einem Gas veranschaulichen kann. Man weiss allgemein, dass eine kleine (differentielle) Änderung der Entropie dS durch eine kleine Änderung der inneren Energie und des Volumens folgendermassen bedingt wird:

$$dS = \frac{1}{T} \cdot dE + \frac{p}{T} \cdot dV. \quad (4)$$

Hier ist also dS ein totales Differential in E und V . Man bezeichnet deswegen die Entropie S auch als *thermodynamisches Potential*.

- a) Was bedeutet das für die Koeffizienten von dE und dV in (4), d. h. in welchem Zusammenhang stehen sie mit der Entropie S ?
- b) Berechne die Entropie S für ein ideales Gas. Ist die Vorstellung der Entropie als ein Mass für die Unordnung gerechtfertigt?

6. Aufgabe (Versteckte Symmetrie)

Eine der fundamentalsten Gleichungen der Quantenmechanik ist die radiale Schrödinger-Gleichung für ein kugelsymmetrisches Potential V :

$$\varphi''(r) + (E - V(r)) \cdot \varphi(r) = 0. \quad (5)$$

Hierbei bezeichnet φ die gesuchte Funktion (d. h. die Lösung der Gleichung) und V ist eine physikalische Wechselwirkung, abhängig von den *Kugelkoordinaten* $r = |(x, y, z)|$. So stellt $V(r) = a/r + b/r^2$ beispielweise die Atomkern-Elektron-Wechselwirkung dar (im Wasserstoffatom).

Die Schrödinger-Gleichung kann man fast nie exakt lösen, sondern nur näherungsweise. Deshalb ist man daran interessiert, Eigenschaften der Lösungsfunktion φ zu bestimmen, ohne φ berechnen zu müssen. Beispielsweise hat man erkannt, dass für die Wechselwirkung $V(r) = ar^2 + br^4 + cr^6$ folgender Zusammenhang gilt: Ist φ eine Lösung der Gleichung (5), dann ist $\psi(r) = \varphi(ir)$ auch eine Lösung von (5), wenn man die Vorzeichen von E und b umdreht. Diese Eigenschaft nennt man *versteckte Symmetrie*².

- a) Rechne nach, dass die Eigenschaft der versteckten Symmetrie tatsächlich vorhanden ist.

In einem zur Veröffentlichung eingereichten Artikel stand folgender Abschnitt:

Notice for example that the substitution $r \mapsto ir$ reverses the signs of E and c in equation

$$\varphi''(r) + \left[E - ar^{\frac{3}{2}} - \frac{b}{r^{\frac{3}{2}}} - \frac{c}{r^{\frac{4}{3}}} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right] \cdot \varphi(r) = 0,$$

leaving the remaining parameters invariant, namely we have

$$E(a, b, c, r) = -E(a, b, -c, ir).$$

- b) Was gibt es an diesem Abschnitt zu bemängeln?

²die verständlichste Referenz hierzu ist M.S. Child, S.-H. Dong and X.-G. Wang, *Quantum states of a sextic potential: hidden symmetry and quantum monodromy*, J. Phys. A 33 (2000), 5653-5661

7. Aufgabe (Transformation der Schrödinger-Gleichung)

Ein aktuelles Forschungsgebiet innerhalb der Quantentheorie befasst sich mit der Suche nach exakten Lösungen fundamentaler quantenmechanischer Gleichungen. Eine davon ist die radiale Schrödinger-Gleichung, die in vereinfachter Form so aussieht:

$$R''(x) + V(x) \cdot R(x) = 0. \quad (6)$$

Hierbei steht V für die jeweilige physikalische Wechselwirkung.

Eine relativ einfache und sehr populäre Methode zur Gewinnung von exakten Lösungen funktioniert so: Man nehme ein V , für welches man exakte Lösungen von (6) kennt. Dann transformiere man (6) folgendermassen:

$$R(x) = f(r(x)) \cdot G(r(x)), \quad (7)$$

d. h. man wechselt die Koordinate von x nach $r(x)$ und multipliziert eine Funktion f vor die unbekannte Funktion G , die die Rolle von R in der neuen DGL übernimmt. Zuletzt stellt man Bedingungen an f und r , so dass die transformierte DGL die Form (6) hat.

- a) Wieso kommt man so zu neuen exakten Lösungen?
- b) Führe die oben beschriebene Transformation durch.

Anleitung: Man transformiere zunächst die DGL (6) mit (7), dazu braucht man nur die Kettenregel. Man überlege dann, welche Beziehung zwischen f und r gelten muss, damit die transformierte DGL wieder die Form (6) annimmt, und drücke damit r durch f aus.

8. Aufgabe (Anwendung der Transformation der Schrödinger-Gleichung)

Das Potential, das die Atomkern-Elektron-Wechselwirkung in einem Wasserstoffatom beschreibt, lautet

$$V(x) = E - \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}, \quad (8)$$

wobei a , b und E Konstanten sind. Für dieses Potential kennt man exakte Lösungen von (6) und daher bietet es sich zum Test der Transformation aus Aufgabe 7 an. Die einfachste Lösung von (6) (mit dem Potential in (8)) hat die Form

$$R(x) = e^{\alpha x} x^\beta, \quad (9)$$

wobei α und β Konstanten sind.

a) Wie müssen α und β gewählt werden, damit (9) die Gleichung (6) löst?

Wir betrachten nun folgenden Spezialfall der Transformation (7):

$$x = \frac{1}{2q+1} \cdot r^{2q+1} \quad \text{und} \quad R(x) = r^q \cdot G(r(x))$$

mit einer beliebigen Konstanten $q \neq -\frac{1}{2}$.

b) Welche neuen Potentiale erhält man mit Hilfe der Transformation aus (8)? Gib für ein solches Potential eine Lösung der Schrödinger-Gleichung an.

Hinweis: Man verwende die Lösung von Aufgabe 7 (d. h. die transformierte Gleichung).

9. Aufgabe (Delay-Gleichungen)

In vielen natürlichen Vorgängen treten bestimmte Effekte verzögert auf. Als Beispiel nehme man eine Populationsentwicklung, in der die Nachkommen eine gewisse Zeit benötigen, bis sie selbst wieder Nachkommen produzieren können. Die Grösse einer Generation wird also zum Zeitpunkt der Geburt der vorherigen Generation bestimmt, d. h. mit zeitlicher Verzögerung. Ein anderes Beispiel für einen verzögerten Effekt ist eine Toilettenspülung: Das Wasser fliesst nicht sofort nach Betätigen der Spülung durch die Schüssel, sondern mit zeitlicher Verzögerung (weil es zunächst vom Wasserkasten zur Schüssel fließen muss).

Solche Verzögerungen lassen sich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen nur schlecht modellieren. Man verwendet stattdessen sogenannte verzögerte Differentialgleichungen (oder *Delay-Gleichungen*). Ein sehr wichtiger Typ hat folgende Gestalt:

$$y'(t) = -\mu y(t) + f(y(t - \tau)), \quad (10)$$

wobei μ und τ konstant sind. Diese Delay-Gleichung wird z. B. zur Beschreibung von Schmeissfliegen-Populationen³ und von neuronalen Netzen benutzt⁴ (um nur zwei zu nennen).

- a) Was könnten die Konstanten μ und τ in (10) bedeuten?
- b) Man setzt oft $\tau = 1$. Wieso ist das keine Einschränkung? Kann man jede Gleichung der Form (10) auf eine mit $\tau = 1$ transformieren?

Wir wollen jetzt ein konkretes Anfangswertproblem für $t \in [0, 1]$ mit Gleichung (10) lösen. Dazu setzen wir $\tau = 1$ und nehmen folgende Funktion f :

$$f(y) = \begin{cases} -1, & y < 0 \\ +1, & y \geq 0. \end{cases}$$

Jetzt fehlt noch der Anfangswert y_0 , wir nehmen

$$y_0(t) = t, \quad \text{wobei } t \in [-1, 0]. \quad (11)$$

- c) Wieso ist die Funktion y_0 ein Anfangswert für unsere Gleichung?
- d) Versuche, eine Lösung der Delay-Gleichung (10) mit Anfangswert (11) zu bestimmen und skizziere sie im Intervall $[0, 1]$.

³W.S.C. Gurney, S.P. Blythe, and R.M. Nisbet, *Nicholson's blowflies revisited*, Nature 287 (1980), 17-21

⁴C.M. Marcus und R.M. Westervelt, *Stability of analog neural networks with delay*, Phys. Rev. A 39 (1989), 347-359

10. Aufgabe (Nichtlineare Schwingungen und Chaos)

Anfang der 60er-Jahre befasste sich der amerikanische Meteorologe E. N. Lorenz mit der numerischen Lösung eines Systems von drei nichtlinearen Differentialgleichungen, die das Verhalten des Wetters beschrieben⁵. Er fand im Wesentlichen heraus, dass seine Lösungen einen scheinbar völlig ungeordneten, *zufälligen* Verlauf zeigten und dass winzige Unterschiede in den Anfangsbedingungen in einem vollkommen verschiedenen Verhalten der Lösungen resultierten. Es folgte sofort die Erkenntnis, dass man offenbar prinzipiell nicht sagen kann, wie sich das Wetter langfristig verhält. Dieses Phänomen, das auch bei anderen DGLn beobachtet wurde, heisst *deterministisches Chaos* und wird bis heute intensiv untersucht.

Im folgenden Modell soll das Auftreten von Chaos und die Bedingungen dafür in folgendem Beispiel experimentell untersucht werden: Der Wagen kann sich nur hinauf

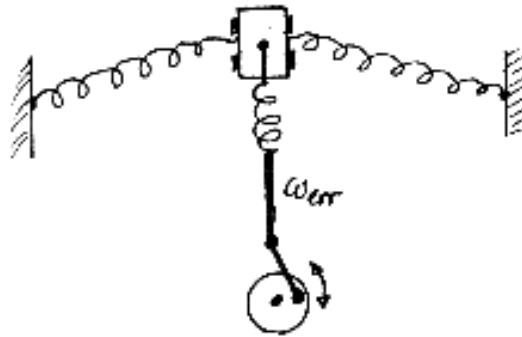


Abbildung 7: Versuchsanordnung für deterministisches Chaos

und hinunter bewegen, aber nicht nach links oder rechts. Die seitlichen Federn haben dieselbe Spannung und das Rad dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_{err} . Die DGL, welche dieses System beschreibt, ist

$$y''(x) + ay'(x) + y^3(x) = b \cos(\omega_{err}x), \quad (12)$$

wobei a und b konstant sind.

a) Erkläre die Bedeutung der einzelnen Terme in der DGL.

Die Gleichung (12) kann nicht exakt gelöst werden, sondern nur numerisch, was ein kleines Programm für Mathematica übernehmen soll. Der Quelltext mit Gebrauchsanleitung findet sich auf der nächsten Seite.

b) Finde chaotische Lösungen der Gleichung (12) und gib die zugehörigen Parameterwerte von a , b und ω_{err} an. Versuche, Bedingungen für die Parameter herauszufinden, die zur Existenz von chaotischen Lösungen erfüllt sein müssen.

⁵E.N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmosph. Sc. 20 (1963), 130-141

```

1 max = 0;
2 a = 0; b = 0; werr = 0;
3 eq = y''[x] + a y'[x] + (y[x])^3 - b Cos[werr x];
4 lsg1 = y /.
5   NDSolve[{eq == 0, y[0] == 3, y'[0] == 3}, y, {x, 0, max},
6     MaxSteps -> 3000][[1]];
7 Plot[lsg1[x], {x, 0, max}]
8 lsg2 = y /.
9   NDSolve[{eq == 0, y[0] == 3, y'[0] == 3}, y, {x, 0, max},
10  MaxSteps -> 3000][[1]];
11 Plot[lsg2[x], {x, 0, max}]
12 Plot[{lsg1[x], lsg2[x]}, {x, 0, max}]

```

Zur Verwendung des Mathematica-Programms: Nach dem Eintippen des Programms muss in Zeile 1 die Variable max auf den Zeitwert gesetzt werden, bis zu dem man die Lösung anschauen will (sie beginnt immer zur Zeit 0). Gut wäre $max = 40$ oder mehr. In Zeile 2 werden die Parameter gesetzt. Zeile 3 enthält die Definition der DGL, in den Zeilen 4-6 wird sie mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$ numerisch gelöst und in Zeile 7 geplottet. In den Zeilen 8-11 kann eine Lösung zu anderen Anfangsbedingungen geplottet werden. In Zeile 12 werden beide Lösungen in einem Bild gezeigt, damit man sie direkt vergleichen kann.

11. Aufgabe (Potenzreihenansatz in linearen Differentialgleichungen)

In der Mechanik und der Quantentheorie trifft man sehr häufig lineare Differentialgleichungen (DGLn) 2. Ordnung an (z. B. bei Schwingungsproblemen, Schrödinger-Gleichung usw.). Solche DGLn lassen sich zwar fast nie exakt lösen, aber wenn die Koeffizienten in der DGL rationale Funktionen sind, klappt manchmal ein Potenzreihenansatz. Damit erhält man zumindest eine beliebig gute Näherungsformel für die gesuchte Lösung.

Probiert man das für die folgende DGL (Schrödinger-Gleichung für zwischenmolekulare Wechselwirkung)

$$y''(x) + \frac{1+x}{x^2}y'(x) - \frac{a}{x^2}y(x) = 0 \quad (13)$$

d. h. setzt man $y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ein, dann bekommt man (wer will, kann das nachprüfen...)

$$y(x) = 1 + ax + \frac{1}{2!}a(a-1)x^2 + \frac{1}{3!}a(a-1)(a-2^2)x^3 + \frac{1}{4!}a(a-1)(a-2^2)(a-3^2)x^4 + \dots \quad (14)$$

Bricht man diese Reihe bei einer bestimmten Ordnung ab, sollte man für kleine x eine Näherung für die Funktion $y(x)$ erhalten.

- a) Kann die DGL (13) Polynome als Lösungen haben? Wenn ja, für welche Parameter a ?
- b) Benutze die Formel (14), um mit dem Taschenrechner Näherungswerte für Funktionswerte von y zu erhalten (z.B. $y(4)$). Untersuche besonders den Einfluss von a und der Ordnung, bei der man die Reihe abbricht, auf das Ergebnis. Was stellst du fest?

Wenn man mit Potenzreihen zu tun hat, kann es nie schaden, deren Konvergenzradius zu kennen.

- c) Berechne den Konvergenzradius der Reihe (14). Was ist der Zusammenhang mit a) und b)?

Hinweis: Der Konvergenzradius R der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ ist gegeben durch

$$\frac{1}{R} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{j+1}}{c_j} \right|$$

(falls dieser Grenzwert existiert). Wird der Grenzwert unendlich, bedeutet das $R = 0$; ist der Grenzwert gleich Null, so bedeutet das $R = \infty$.