Aufgabe 1: Berechnung dreidimensionaler Flächen

Theorie

- Funktionen mit drei Variablen ordnen jedem Punkt im Raum einen Wert zu: $f(x, y, z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
- Punkte mit demselben Wert bilden eine Niveaumenge. Diese bildet graphisch eine Fläche im Definitionsbereich.
- Der Gradient einer Funktion enthält die partiellen Ableitungen: $grad\ f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$. Ausserdem steht der Gradient in jedem Punkt senkrecht zur Niveaufläche.

3D-Grafiken

Abbildung 1: Superellipsoid, Blob, Metaball

- 3D-Grafiken sind meistens aus Standardobjekten aufgebaut. Daraus können kompliziertere Strukturen hergestellt werden
- Die Standardobjekte werden als Niveauflächen einer Funktion von drei Variablen definiert

Aufgaben

Gegeben ist das Superellipsoid, dessen Punkte die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n - 1 = 0$$

erfüllen. Dabei sind a, b, c immer positiv und $n \geq 2$.

a) Das SE hat seinen Mittelpunkt im Ursprung, also die Koordinaten (0, 0, 0). Ausserdem ist es drehsymmetrisch um jede Koordinatenachse.

b) a, b und c bestimmen die Ausdehnung des SEs. Sie sind gerade die Halbachsen des SEs in x -, y - und z -Richtung. Daher befindet sich die grösste Ausdehnung immer auf der Achse. Denn löst man die Gleichung beispielsweise nach z auf, so erhält man

$$z = \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n - \left(\frac{y}{b}\right)^n}.$$

Da nun $\left(\frac{x}{a}\right)^n$ und $\left(\frac{y}{b}\right)^n$ immer ≥ 0 sind, müssen x und y für ein maximales z null sein. Das SE hat seine maximale resp. minimale Ausdehnung auf der z - Achse für den Wert von $z = \pm c$.

Die Extremwerte für die anderen Achsen sind entsprechend:

$$x = \pm a \qquad\qquad y = \pm b$$

c) Um den Normalenvektor der Funktion zu finden wird der Gradient der Funktion bestimmt:

$$grad\ f\ (x,y,z) = \left(\frac{n \cdot x^{n-1}}{a^n}, \frac{n \cdot y^{n-1}}{b^n}, \frac{n \cdot z^{n-1}}{c^n}\right)$$

Für den Grenzwert $n \to \infty$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n \cdot x^{n-1}}{a^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{a}\right)\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}$$

Nun wird eine Fallunterscheidung gemacht: $x < a$ oder $x = a$. Im ersten Fall strebt der Grenzwert gegen 0. Im zweiten Fall ist der Grenzwert ∞. Für y und z sind die Grenzwerte analog.

Dies ergibt folgende Normalenvektoren:

$$\underset{n\to\infty}{V_{normal}} = \begin{pmatrix}\pm\infty\\0\\0\end{pmatrix} \quad \underset{n\to\infty}{V_{normal}} = \begin{pmatrix}0\\\pm\infty\\0\end{pmatrix} \quad \underset{n\to\infty}{V_{normal}} = \begin{pmatrix}0\\0\\\pm\infty\end{pmatrix}$$

Dies bedeutet, dass wenn n gegen ∞ strebt das SE zu einem Würfel wird.

d) Das SE wird durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$x^{20} + y^{20} + z^{20} = 1$$

In diesem Spezialfall zeigt das SE die Form eines abgerundeten Würfels. Um zu untersuchen in welchen Stellen auf der xz - bzw. yz -Ebene die Steigung des SEs in Richtung der x- bzw. y-Achse genau 45° betrgt, wird die Gleichung als erstes nach z aufgelöst.

$$z = (1 - x^{20} - y^{20})^{\frac{1}{20}}$$

Darauf wird der Gradient berechnet: $grad\ f(x,y) = \begin{pmatrix}\frac{x^{19}}{\left(\sqrt[20]{1-x^{20}-y^{20}}\right)^{19}}\\\frac{y^{19}}{\left(\sqrt[20]{1-x^{20}-y^{20}}\right)^{19}}\end{pmatrix}$

Anschliessend wird die Steigung auf der x-Achse unterucht. Da die Steigung von 45° vorgegeben ist, muss $\frac{\Delta x}{\Delta z} = 1$ gelten. Da $y = 0$ ist bekommt man $\frac{x^{19}}{\left(\sqrt[20]{1-x^{20}-y^{20}}\right)^{19}} = 1$. Da es sich hierbei xz-Ebene handelt, wird $y = 0$ eingesetz und die Gleichung nach x aufgelöst.

Man erhält $x = \sqrt[20]{\frac{1}{2}} = 0.966$. Dies ergibt die Koordinaten der gefragten Stellen:

$P_1 = (0.966, 0)\ z > 0$ $\qquad P_2 = (-0.966, 0)\ z > 0$ $\qquad$ auf der x-Achse
$P_3 = (0, 0.966)\ z > 0$ $\qquad P_4 = (0, -0.966)\ z > 0$ $\qquad$ auf der y-Achse

Vier weiter Punkte erfüllen die Bedingungen ebenfalls. Sie haben dieselben Koordinaten wie P_1 bis P_4 unterscheiden sich jedoch durch $z < 0$.

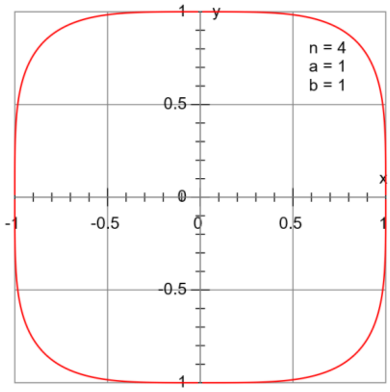

Abbildung 2: Superellipse mit n=4