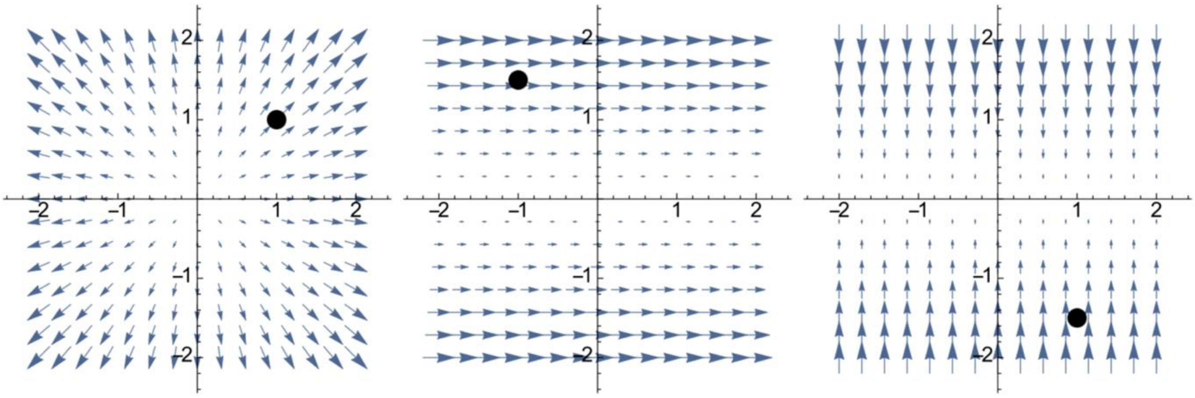
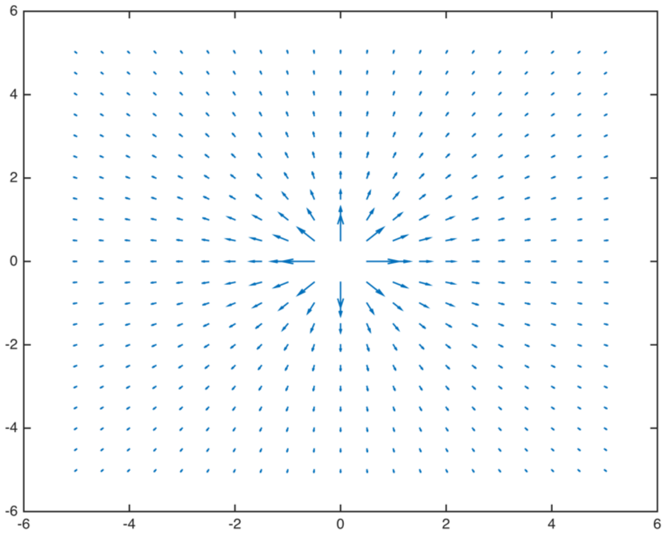
**Aufgabe 3 Divergenz**

a) Schätze, ob die Divergenz der Vektorfelder in Abbildung 4 im jeweils markierten Punkt jeweils positiv, negativ oder Null ist (mit Begründung).

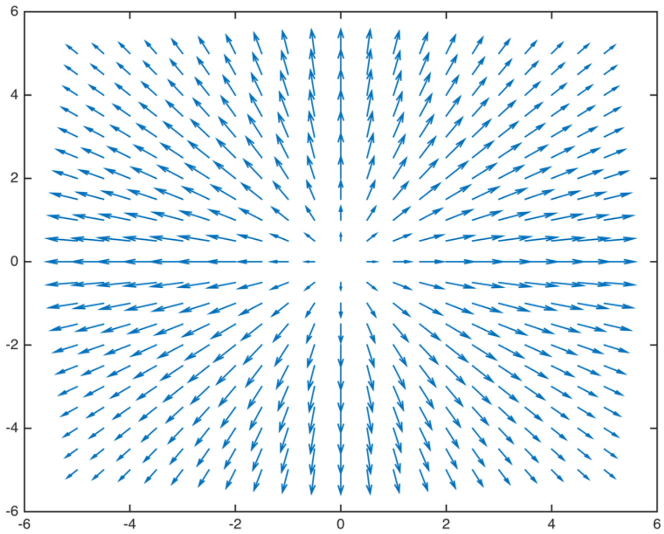


| | | |
|---|---|---|
| $div\,\vec{F} > 0$ | $div\,\vec{F} = 0$ | $div\,\vec{F} < 0$ |
| Quelle | Quellfrei | Senke |
| Begründung: Es handelt sich um eine Quelle da der Pfeil der in markierten Punkt hinein fliesst, kleiner ist als der, der hinaus fliesst. | Begründung: Dieses Feld ist Quellfrei, da der Pfeil der in markierten Punkt hinein fliesst, gleich gross ist wie der, der hinaus fliesst. | Begründung: Es handelt sich hier um eine Senke, da der Pfeil der in markierten Punkt hinein fliesst, grösser ist als hinaus fliesst. |

b) Skizziere V für verschiedene k.



Für K=1



Für K=50

c) Experimentiere und finde heraus, was eine Variation von k bewirkt. Gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen der Länge der Vektoren und der Divergenz von V?

Für die Länge des Vektors gilt: $\vec{a} = \binom{a_x}{a_y} \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}_x^2 + \vec{a}_y^2}$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2)^k} \\ \frac{y}{(x^2+y^2)^k} \end{pmatrix} \qquad |\vec{V}| = \sqrt{\frac{x}{(x^2+y^2)^{2k}}^2 + \frac{y}{(x^2+y^2)^{2k}}^2}$$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{2k}}} = \sqrt{\frac{1}{(x^2+y^2)^{2k-1}}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{k-\frac{1}{2}}} = \underline{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^k}}$$

Nun wird die Divergenz berechnet: $div\overrightarrow{F} = \nabla \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial x} F_y$

$$\frac{\partial}{\partial x} V_x + \frac{\partial}{\partial x} V_y$$

Leiten erst die erste Vektorkomponente nach x ab:

$$\frac{\partial}{\partial x} V_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2+y^2)^k} = (x^2+y^2)^{-k} - 2kx^2(x^2+y^2)^{-k-1}$$
$$(x^2+y^2)^{-k-1}(-2kx^2+x^2+y^2)$$

Analog nach y ableiten:

$$\frac{\partial}{\partial y} V_y = (x^2+y^2)^{-k-1}(-2ky^2+x^2+y^2)$$

zusammenrechnen:

$$\frac{\partial}{\partial x} V_x + \frac{\partial}{\partial x} V_y$$

$$= \frac{(-2ky^2+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{k+1}} + \frac{(-2kx^2+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{k+1}} = \frac{2(x^2+y^2) - 2k(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{k+1}} = \frac{2-2k}{(x^2+y^2)^k}$$
$$= \underline{\frac{-2(k-1)}{(x^2+y^2)^k}}$$

Berechnung der Divergenz und der Länge für verschiedene K

K = 0

---

Div(v(x)) = $\frac{-2(0-1)}{(x^2+y^2)^0} = \frac{2}{1} = 2$

Länge = $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^0} = \sqrt{x^2+y^2}$

K = 1

---

Div(v(x)) = $\frac{-2(1-1)}{(x^2+y^2)^1} = 0$

Länge = $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

K = -1

---

Div(v(x)) = $\frac{-2(-1-1)}{(x^2+y^2)^{-1}} = 4(x^2+y^2)$

Länge = $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{-1}} = \sqrt{x^2+y^2} * (x^2+y^2) = (x^2+y^2)^{3/2}$

K = 0.5

---

Div(v(x)) = $\frac{-2(0.5-1)}{(x^2+y^2)^{0.5}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Länge = $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{0.5}} = 1$