Aufgabe 4, Elektrischer Fluss

Der elektrische Fluss ist ein Mass für die Stärke des elektrischen Feldes. Anschaulich beschreibt der elektrische Fluss, wieviel Feldlinien durch eine bestimmte geschlossene Oberfläche quellen. Mathematisch gesehen ist der elektrische Fluss das Integral des E-Felds über eine geschlossene Oberfläche.

Das E-Feld einer punktförmigen Ladung, die im Nullpunkt sitzt, lautet

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{q}{|(x,y,z)|^3} \cdot (x,y,z)$$

wobei q konstant ist (und die Ladungsgrösse beschreibt).

b) Berechne den elektrischen Fluss für verschiedene geschlossene Oberflächen (z. B. Kugeln verschiedener Radien; Zylinder), wobei die Ladung jeweils im Inneren des von der Oberfläche eingeschlossenen Volumens sein soll. Was fällt auf? Kann man den Satz von Gauss benutzen? Gibt es eine anschauliche Erklärung?

$$\phi = \iint_{\partial S} \bar{v} \cdot \bar{n} \; dA$$

Für eine Kugel mit Radius R gilt:

$$r(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} Rsin\theta cos\varphi \\ Rsin\theta sin\varphi \\ Rcos\theta \end{pmatrix}$$

$$\partial S \in \{(\varphi,\theta) | 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi\}$$

$$\bar{v}(\varphi,\theta) = \frac{q}{|\bar{r}|^3} \cdot \bar{r}$$

$$\phi = \iint_{\partial S} \bar{v} \cdot \bar{n} \; dA = \iint_{\partial S} \frac{q}{|\bar{r}|^3} \cdot \bar{r} \cdot \bar{n} \cdot R^2 sin\theta \; d\theta d\varphi = \iint_{\partial S} \frac{q}{|\bar{r}|^3} \cdot |\bar{r}| \cdot R^2 sin\theta \; d\theta d\varphi = \cdots = 4\pi \cdot q$$

Für einen Zylinder mit Höhe 2h gilt:

$$r(\varphi,z) = \begin{pmatrix} Rcos\varphi \\ Rsin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$|r(\varphi,z)| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$\partial S \in \{(\varphi,z) | 0 < \varphi < 2\pi, -h < z < h\}$$

$$\bar{v}(\varphi,z) = \frac{q}{\left|\overline{r(\varphi,z)}\right|^3} \cdot \bar{r}(\varphi,z)$$

$$\bar{n} = r_\varphi \times r_z = \begin{pmatrix} cos\varphi \\ sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi = \iint_{\partial S} \bar{v} \cdot \bar{n} \; dA = \iint_{\partial S} \frac{q}{\left|\overline{r(\varphi,z)}\right|^3} \cdot \begin{pmatrix} Rcos\varphi \\ Rsin\varphi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\varphi \\ sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\theta d\varphi$$

$$= q \cdot 2\pi \cdot R^2 \int_{-h}^{h} \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}^3}\, dz = q \cdot 2\pi \cdot R^2 \left\lfloor \frac{z}{R^2\sqrt{R^2+z^2}} \right\rfloor = \frac{4\pi \cdot q \cdot h}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

Für h können nun beliebige Werte eingesetzt werden. Wir lassen nun h gegen ∞ streben.

$$\lim_{h\to\infty} \frac{4\pi \cdot q \cdot h}{\sqrt{R^2+h^2}} = 4\pi \cdot q \cdot \lim_{h\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{R}{h^2}^2 + 1}} = 4\pi \cdot q$$

Aus den obigen Berechnungen folgern wir nun, dass egal welche Oberfläche gewählt wird, der Fluss wird immer derselbe sein. Das E-Feld wird nämlich von der Ladung im Nullpunkt erzeugt. Daraus ergibt sich, dass das E-Feld ausserhalb des Nullpunktes nicht mehr beeinflusst wird. Und dass durch jede geschlossene Oberfläche derselbe Fluss austritt.

Die Ladungsquelle liegt im Nullpunkt P=(0,0,0). Der Fluss jedoch ist in diesem Punkt nicht definiert. Da der Satz von Gauss nur für stetig differenzierbare Vektorfelder gilt, kann dieser hier nicht angewendet werden.

c) Die Ladung soll sich nun ausserhalb des Volumens V befinden. In diesem Fall darf man den Satz von Gauss anwenden, um den Fluss durch die Oberfläche des Volumens V zu berechnen. Das E-feld ist nun überall im Volumen definiert. Daraus folgert man wegen $div\bar{v} = 0$, weil sie quellenfrei ist.

$$\iint_O \bar{v} \cdot \bar{n}\, dO = \iiint_V div\bar{v}\, dV = 0$$

d) Es wird angenommen, dass die Flüsse durch W und V identisch sind, da das E-Feld ausserhalb von V nicht mehr beeinflusst wird. Im Volumen W/V ist sowohl das E-Feld definiert und die Divergenz (des Feldes) ist gleich Null.

S= Rand von W/V

Satz von Gauss:

$$\iint_S \bar{v} \cdot \bar{n}\, dO = \iiint_{W/V} div\bar{v}\, dV = 0$$

Der Rand S von W/V besteht aus den Oberflächen W und V, welche entgegengesetzt zueinander orientiert sind.

$$V = \partial V, \qquad W = \partial W$$

$$\iint_S \bar{v} \cdot \bar{n}\, dO = \iint_{\partial W} \bar{v} \cdot \bar{n}\, dO - \iint_{\partial V} \bar{v} \cdot \bar{n}\, dO = 0$$

n: nach aussen zeigender Normaleinheitsvektor (von W/V ausgesehen).

Es folgt:

$$\iint_{\partial V} \bar{v} \cdot \bar{n}\, dO = \iint_{\partial W} \bar{v} \cdot \bar{n}\, dO$$

Die obige Annahme ist somit bewiesen, die Flüsse stimmen überein.