Anwendungsübungen MATL: Aufgabe 1

Berechnung dreidimensionaler Flächen

Roberto Emma, Eleonora Bianda

Gleichung eines Superellipsoides (SE):

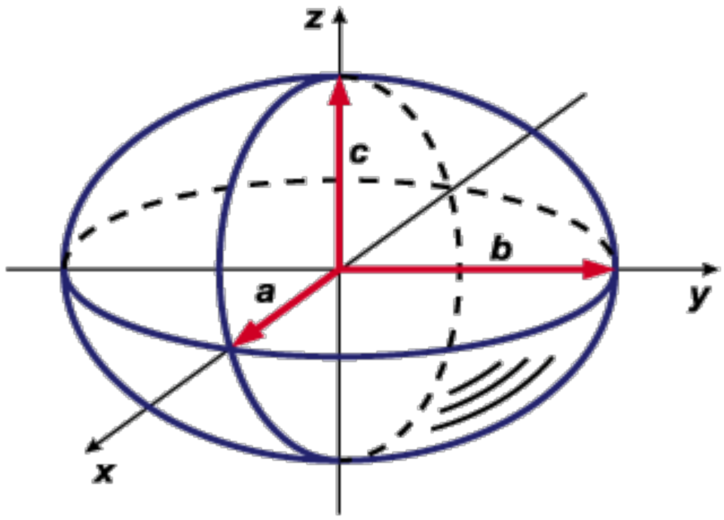
$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n - 1 = 0\ ;\ n \geq 2 \text{ (gerade Zahl) und } a, b, c > 0$$

(a) Wie ist das SE im Raum positioniert?

Man betrachte den bekannten Fall n=2:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 - 1 = 0 \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Was für eine Figur stellt diese Gleichung dar? Wo ist der Mittelpunkt?



Allgemeine Gleichung mit Mittelpunkt (x_0, y_0, z_0):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

(b) Wie ist die Ausdehnung des SEs?

Maximalstellen und Minimalstellen der Funktionen x(y,z); y(x,z); z(x,y):

x = ...

y = ...

z = ...

Maximale und minimale x für y=z=... aber mit entgegengesetzte Vorzeichen ($\pm$...).
Maximale und minimale y für x=z=... aber mit entgegengesetzte Vorzeichen ($\pm$...).
Maximale und minimale z für x=y=... aber mit entgegengesetzte Vorzeichen ($\pm$...).

(c) Normalvektor $\vec{n}$ des SEs an einem Punkt (x,y,z)? Wie verhält er sich für n → ∞?

$$f: (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n$$

f(x,y,z)=1 ↔ f ist eine Niveaufläche zum Niveau c=1.
Das Gradient des SEs, das in Richtung der grössten Steigung zeigt, steht somit senkrecht zur diesen Niveaufläche; d.h. dass das Gradient die gleiche Richtung des Normalvektors hat.

$$\mathbf{Grad}(\mathbf{SEs}) = \left(\frac{nx^{n-1}}{a^n}; \frac{ny^{n-1}}{b^n}; \frac{nz^{n-1}}{c^n}\right) = \boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{n}}$$

n → ∞:

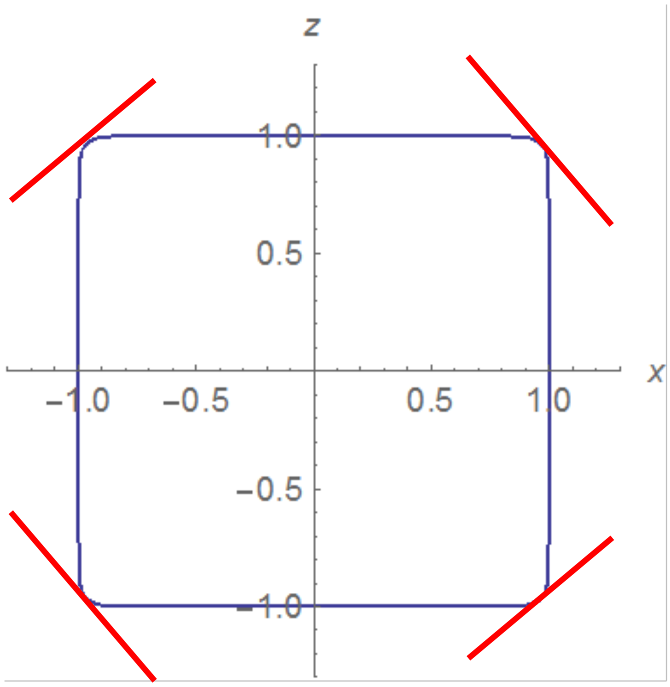
$$\lim_{n \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{a^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{nx^n x^{-1}}{a^n} = \frac{1}{x} \lim_{n \to \infty} n \left(\frac{x}{a}\right)^n = \begin{cases} \to \infty & ; \quad y = z = 0; x = a \\ \to 0 & ; \quad y \neq 0, z \neq 0; x < a \end{cases}$$

Analog für die andere zwei Koordinaten.

(d) Spezialfall a=b=c=1 und n=20. In welchen Stellen auf der xz- bzw. yz-Ebene ist die Steigung des SEs in x- bzw. y-Richtung genau 45°?

<u>xz-Ebene in x-Richtung:</u>

$$x^{20} + y^{20} + z^{20} = 1 \leftrightarrow z^{20} = 1 - (x^{20} + y^{20}) \leftrightarrow z(x, y) = \sqrt[20]{1 - x^{20} - y^{20}}$$



$$\operatorname{Grad}\big(z(x,y)\big) = \left(\frac{1}{20}(1-x^{20}-y^{20})^{-\frac{19}{20}}(-20x^{19});\ \frac{1}{20}(1-x^{20}-y^{20})^{-\frac{19}{20}}(-20y^{19})\right)$$

$\rightarrow \left(\frac{1}{20}(1-x^{20})^{-\frac{19}{20}}(-20x^{19});\ 0\right)$ da man in der xz-Ebene ist.

$$D_{\vec{e}}z(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{20}(1-x^{20})^{-\frac{19}{20}}(-20x^{19}) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{20}(1-x^{20})^{-\frac{19}{20}}(-20x^{19}) = 1$$

$$\leftrightarrow\ -x^{19} = (1-x^{20})^{\frac{19}{20}} \leftrightarrow -x = (1-x^{20})^{\frac{1}{20}} \leftrightarrow x^{20} = 1-x^{20} \leftrightarrow x = \sqrt[20]{\frac{1}{2}}$$

$$z = \sqrt[20]{1 - \sqrt[20]{\frac{1}{2}}^{\,20} - 0^{20}} = \sqrt[20]{\frac{1}{2}}$$

Somit sind die gesuchte Stellen:

$$\left(\sqrt[20]{\frac{1}{2}}, 0, \sqrt[20]{\frac{1}{2}}\right); \left(-\sqrt[20]{\frac{1}{2}}, 0, -\sqrt[20]{\frac{1}{2}}\right); \left(-\sqrt[20]{\frac{1}{2}}, 0, \sqrt[20]{\frac{1}{2}}\right); \left(\sqrt[20]{\frac{1}{2}}, 0, -\sqrt[20]{\frac{1}{2}}\right)$$

Analog für yz-Ebene in y-Richtung.