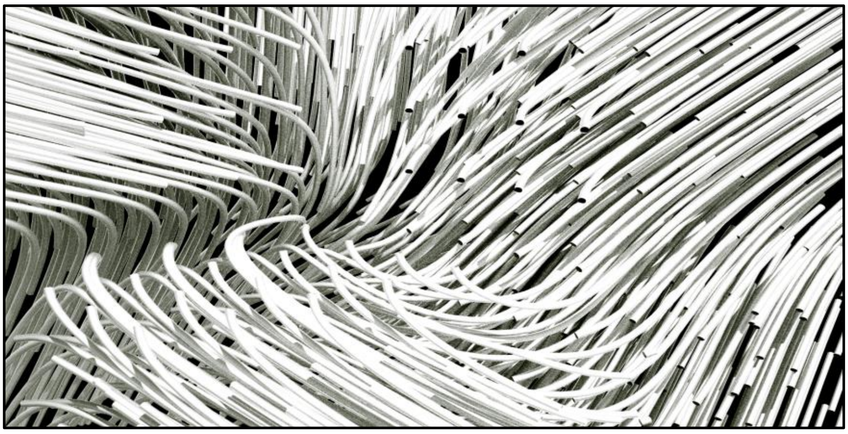
Anwendungsübung 3

Anschauliche Bedeutung der Divergenz

Elia Inguscio und Marco Rathlef



Theorie

Sieht man ein Vektorfeld als Strömung an, dann ist die Divergenz ein Maß für die Änderung der Strömungsstärke (in Strömungsrichtung).
Dazu stellt man sich ein kleines, durchlässiges Kästchen vor, das in die Strömung gelegt wird: fließt mehr hinaus als hinein, ist die Strömung offenbar stärker geworden (die Divergenz ist im Kästchen positiv). Entsprechend, wenn weniger aus dem Kästchen hinaus- als hineinströmt, wird die Strömung abgeschwächt (die Divergenz ist im Kästchen negativ).

$D < 0$ | $D = 0$ | $D > 0$

a) *Schätze, ob die Divergenz der Vektorfelder in Abb. 1 im jeweils markierten Punkt jeweils positiv, negativ oder Null ist (mit Begründung).*

a) b) c)

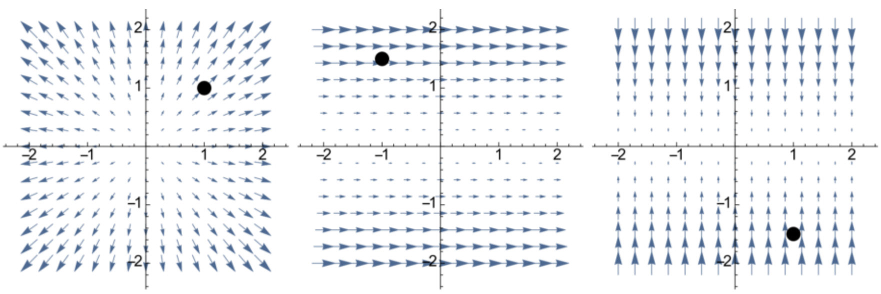


Abb. 1: drei einfache Vektorfelder.

Im ersten Vektorfeld (a) sieht man, dass die Vektorenlänge proportional zum Abstand vom Ursprung ist. Somit sind die Vektoren, die im schwarzen Punkt hineingehen kürzer als die, die herauskommen ($|\vec{V}_{IN}| < |\vec{V}_{OUT}|$). Deswegen kann man schliessen, dass die Divergenz positiv ist ($D > 0$).

Im Vektorfeld b ist die Strömung, die durch den Punkt fliesst, konstant ($|\vec{V}_{IN}| = |\vec{V}_{OUT}|$), und somit $D = 0$.

Im letzten Vektorfeld (c) gilt $D < 0$, da $|\vec{V}_{IN}| > |\vec{V}_{OUT}|$.

Unter anderem bestimmt natürlich die Längenänderung der Vektoren in der Umgebung eines Punktes die dortige Änderung der Strömungsstärke. Der genaue Zusammenhang soll am Beispiel des Vektorfelds

$$V(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^k} \cdot (x,y)$$

untersucht werden. Hierbei ist $k \geq 0$.

b) *Skizziere V für verschiedene k.*

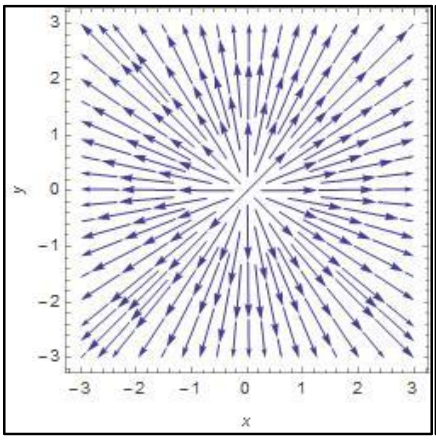


Abb. 2: k = 0.

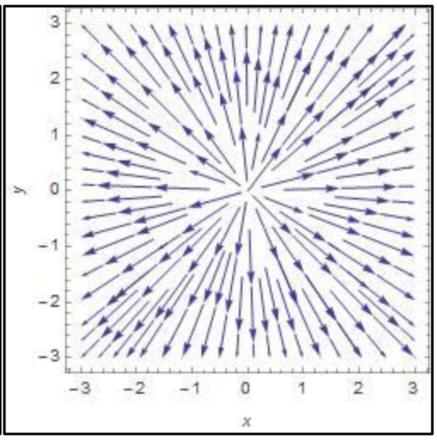


Abb. 3: k = ½.

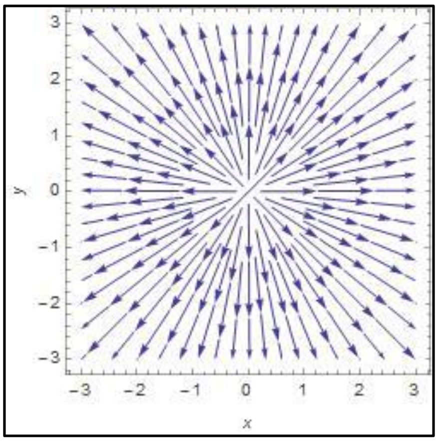


Abb. 4: k = 1.

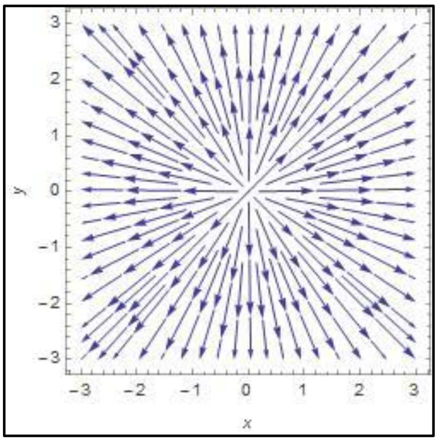


Abb. 5: k = 2.

c) *Experimentiere und finde heraus, was eine Variation von k bewirkt. Gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen der Länge der Vektoren und der Divergenz von V?*

Die Divergenz von V ist gegeben durch:

$$Div(V) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Da dieser Fall nur in 2 Dimensionen betrachtet wird, kann man die z-Komponente vernachlässigen, und somit ergibt sich:

$$Div(V) = \frac{(x^2+y^2)^k - x(k(x^2+y^2)^{k-1})2x}{(x^2+y^2)^{2k}} + \frac{(x^2+y^2)^k - y(k(x^2+y^2)^{k-1})2y}{(x^2+y^2)^{2k}}$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)^k - (x^2+y^2)(2k(x^2+y^2)^{k-1})}{(x^2+y^2)^{2k}} = \frac{2(x^2+y^2)^k}{(x^2+y^2)^{2k}}(1-k)$$

$$= 2(x^2+y^2)^{-k}(1-k)$$

Die Länge der Vektoren wird folgendermassen ausgedrückt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^k}\right)^2 + \left(\frac{y}{(x^2+y^2)^k}\right)^2} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-k}$$

Daraus folgt, dass der Zusammenhang zwischen Divergenz und Länge der Vektoren wie folgt beschrieben werden kann:

$$Div(V) = |\vec{v}| \cdot \frac{2(1-k)}{d}$$

(d= Distanz zum Ursprung = $\sqrt{x^2+y^2}$)

Somit findet man folgende Divergenzen und Längen der Vektoren für die vorher untersuchten Werte k:

Tab. 1: $|\vec{v}|$ und D für verschiedene k.

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{|\vec{v}|}$	$\boldsymbol{D}$
0	d	2
½	1	$1/d$
1	$1/d$	0
2	$1/d^3$	$-2/d^4$

Aus Tab. 1 sieht man, dass es nicht immer sehr anschaulich ist, wie die Länge der Vektoren die Divergenz beeinflusst. Wenn z.B. der Fall k = ½ betrachtet wird, könnte man meinen, da $|\vec{v}|$ konstant ist, dass $D = 0$. Diese Behauptung ist jedoch falsch, da es sich bei diesem Vektorfeld um eine radiale Darstellung handelt, und somit die Strömung durch die hypothetischen Kästchen ständig zunimmt (D > 0).