Diego Giovanoli, Lukas Egloff 04.03.2016

1: Berechnung dreidimensionaler Flächen

Theorie

- Funktion von 3 Variablen: $f(x, y, z)$: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jedem Punkt im Raum einen Wert zu.
- Alle Punkte, denen der selbe Wert zugeordnet sind, bilden eine Niveaumenge $f(x, y, z) = c$.
- Graphisch gesehen bildet diese Niveaumenge eine Fläche im Definitionsbereich.
- Der Gradient der Funktion $grad f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$ enthält die partiellen Ableitungen der Funktion. Der Gradient steht an jedem Punkt senkrecht auf der Niveaufläche durch diesen Punkt.

3-D Grafiken

- 3-D Grafiken sind oft aus einigen Standardobjekten aufgebaut:

Abbildung 1: Superellipsoid, Blob, Metaball [1]

- Diese werden mathematisch als Niveauflächen von Funktionen in 3 Variablen beschrieben.
- Das Superellipsoid wird mit der Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n - 1 = 0$ beschrieben. Dabei sin a,b,c > 0 und die gerade Zahl n ≥ 2

Aufgaben

a) Die Superellipsoide hat im Raum den Mittelpunkt (0 , 0 , 0). Dabei ist die SE drehsymmetrisch um jede Koordinatenachse.

b) Die Ausdehnung der SE wird durch die Konstanten a, b, c bestimmt. Diese sind die Halbachsen der SE in die x, y bzw. z -Richtung. Die grösste Ausdehnung in jede Richtung findet man auf der Achse selbst.

$$\left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 + \left(\frac{z}{1}\right)^2 - 1 = 0 \qquad \left(\frac{x}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 - 1 = 0$$

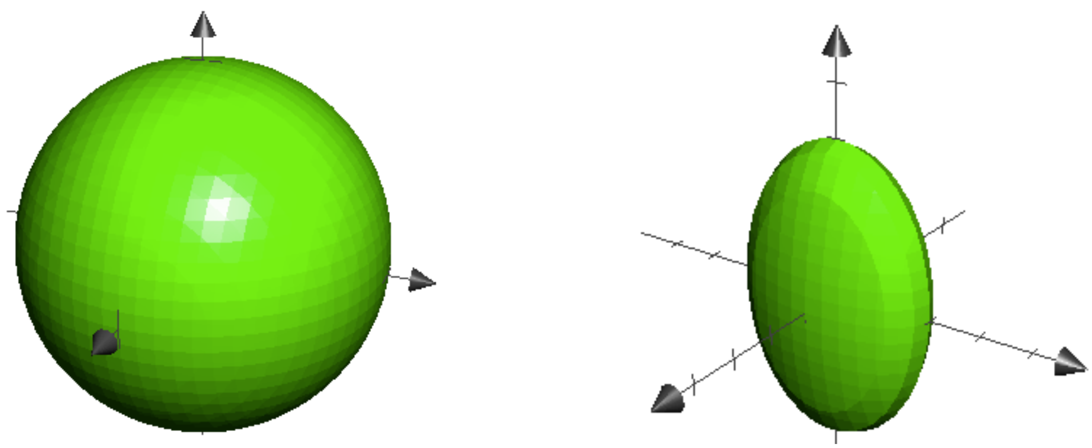

Abbildung 2: Superellipsoiden mit unterschiedlichen Halbachsen

c)

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n - 1 = 0$$

Nun wird der Gradient der Funktion f(x,y,z) bestimmt, da dieser ein möglicher Normalvektor der Niveaufläche ist.

$$grad f(x,y,z) = \left(\frac{n * x^{n-1}}{a^n}, \frac{n * y^{n-1}}{b^n}, n * \frac{y^{n-1}}{c^n}\right)^T$$

Für den Grenzwert n -> ∞ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n * x^{n-1}}{a^n}\right) = \lim_{n\to\infty}(\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{a}}) * \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}$$

Bei x < a strebt $\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}$ gegen 0.

Bei x = a gilt $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a} * \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} = \frac{n}{a}$

Dasselbe gilt für $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n*y^{n-1}}{b^n}\right)$ und $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n*z^{n-1}}{c^n}\right)$

Somit handelt es sich um einen Würfel mit den Seitenlängen 2a, 2b und 2c, die Flächen des Würfels haben folgende Normalvektoren:

$$\mathrm{v}_{\underset{n\to\infty}{normal}} = \begin{pmatrix}\pm\frac{n}{a}\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \mathrm{v}_{\underset{n\to\infty}{normal}} = \begin{pmatrix}0\\\pm\frac{n}{b}\\0\end{pmatrix} \qquad \mathrm{v}_{\underset{n\to\infty}{normal}} = \begin{pmatrix}0\\0\\\pm\frac{n}{c}\end{pmatrix}$$

d) Der Körper kann durch die Gleichung (x) dargestellt werden

$$x^{20} + y^{20} + z^{20} = 1$$

Diese Gleichung gibt dem Körper eine Form eines leicht abgerundeten Würfels.
Nun kann die Gleichung auch nach z aufgelöst werden, somit erhalten wir die Gleichung:

$$\mathrm{z} = (1 - \mathrm{x}^{20} - \mathrm{y}^{20})^{\frac{1}{20}}$$

Nun berechnet man den Gradienten ∇z(x,y)= $\begin{pmatrix}\frac{x^{19}}{\left(\sqrt[20]{1-x^{20}-y^{20}}\right)^{19}}\\\frac{y^{19}}{\left(\sqrt[20]{1-x^{20}-y^{20}}\right)^{19}}\end{pmatrix}$

Wir untersuchen die Steigung auf der X-Achse (-> y = 0)

Damit die Steigung 45° ist $\frac{\Delta x}{\Delta z} = 1$, muss gelten und somit $\frac{x^{19}}{\left(\sqrt[20]{1-x^{20}-y^{20}}\right)^{19}} = 1$

Nun löst man diese Gleichung für x auf, x = $\left(\sqrt[20]{1-x^{20}-y^{2}}\right)$

Da y = 0, ist x = $\left(\sqrt[20]{1-x^{20}}\right)$ = 0.9659

Die Bedingung ist in insgesamt 8 Punkten erfüllt:

$P_1 = (0.9659\ ,\ 0)$ $z > 0$ $P_2 = (-0.9659\ ,\ 0)$ $z > 0$ Auf der X-Achse

$P_3 = (0\ ,\ 0.9659)$ $z > 0$ $P_4 = (0\ ,\ -0.9659)$ $z > 0$ Auf der Y-Achse

Die anderen Punkte haben dieselben x- und y-Koordinaten wie P1 –P4 jedoch ist ihr z < 0

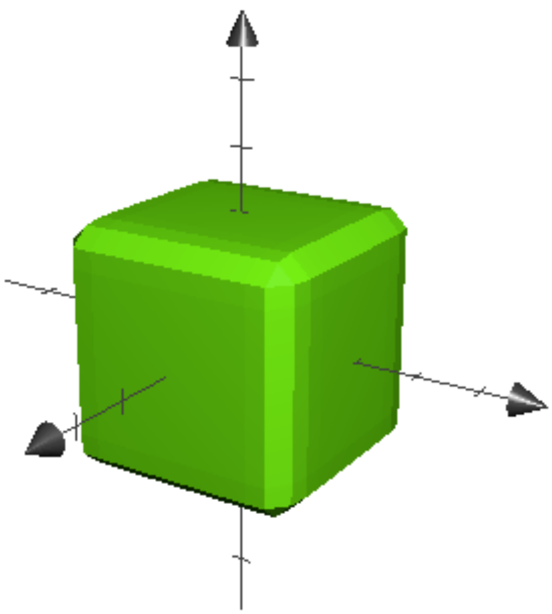

Abbildung 3: Die SE aus Aufgabe d)

Quellen:

[1] Anwendungsübungen MATL Skript, Prof. Urs Lang, FS 2016