2. Aufgabe (Zuverlässigkeitsrechnung)

Aufgabe der Zuverlässigkeitsrechnung ist es, statistische Aussagen über die Lebensdauer (d.h. Funktionsdauer) von Gebrauchsgegenständen zu machen. Im konkreten Fall funktioniert das so: aus gemessenen Daten über die Lebensdauer eines Gerätes wird eine Dichtefunktion f hergeleitet, deren Variable die Zeit t ist. Das Integral

$$\int_{t1}^{t2} f(t)dt$$

liefert dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gerät im Zeitintervall [t_1; t_2] kaputt geht.

a)

Zum Zeitpunkt P0 hat es bereits eine kleine Anzahl an Glühbirnen die kaputt gehen. Vermutlich sind dies Produktionsfehler. Da die Wahrscheinlichkeit dass eine Birne kaputt geht als die Fläche der Funktion dargestellt ist, muss die Fläche also 1 sein. Da nun aber bereits einige Glühbirnen zu Beginn kaputt gehen, müssen diese noch abgezogen werden, denn diese verfälschen unsere Statistik. Also ist die Fläche 1 – P0.

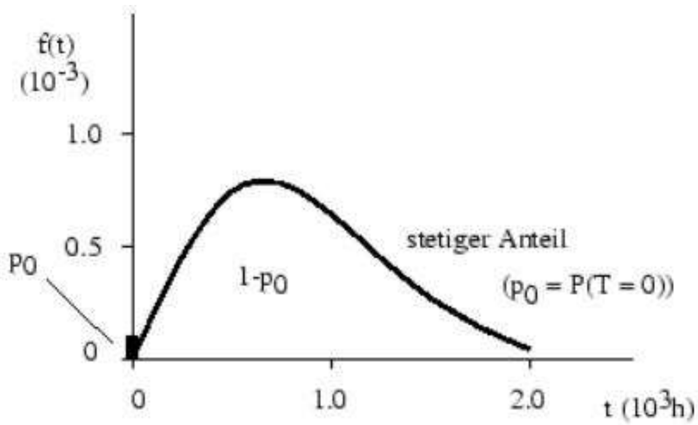


Abbildung 1. Lebensdauer von Glühbirnen

Aus dem Graphen kann man erkennen, dass die meisten Glühbirnen zwischen einer Lebensdauer von ca. 500h - 1250h kaputt gehen. Danach nimmt die Anzahl an Glühbirnen stark ab. Eine Lebensdauer von 2000h erreichen nur sehr wenige Glühbirnen, und entsprechend klein ist die Anzahl die noch länger bestehen bleiben. Da diese Anzahl, also ihre Wahrscheinlichkeit zu überdauern, so klein ist, tragen sie kaum etwas zur Fläche hinzu. Entsprechend können diese also auch vernachlässigt werden.

b)

Um die Dichtefunktion f(t) zu erhalten, müssen wir die Funktion F(t) =$\frac{\Gamma(\alpha,\frac{t}{\beta})}{\Gamma(\alpha)}$ ableiten.

Dazu betrachten wir zuerst nur den Term im Nenner.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} * e^{-y} \, dy$$

Durch partielle Integration, mit $u = y^{\alpha-1}$; $u' = (\alpha - 1) * y^{\alpha-2}$ und $v' = e^{-y}$; $v = -e^{-y}$ erhalten wir:

$$[y^{\alpha-1} * -e^{-y}]_0^{\infty} + (\alpha - 1) \int_0^{\infty} y^{\alpha-2} * e^{-y} \, dy$$

Da der erste Teil in eckigen Klammer null ergibt, haben wir aus unserer ursprünglichen Gamma Funktion nur ein Faktor $(\alpha - 1)$ erhalten und dessen Variable um 1 verringert.

$$(\alpha - 1) * \Gamma(\alpha - 1)$$

Daraus kann man also folgen, dass

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$

Ist.

Um die Funktion F(t) abzuleiten, müssen wir also nur den Zähler betrachten. Demnach kann man nun ohne das Integral zu berechnen direkt den Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung anwenden. Daraus folg dann:

$$\frac{d}{dt}\,\Gamma\left(\alpha,\frac{t}{\beta}\right) = \frac{d}{dt}\int_0^{\frac{t}{\beta}} y^{\alpha-1} * \, e^{-y}\, dy = \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} * e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)} * \left(\frac{1}{\beta}\right)$$

Also lautet unsere Dichtefunktion:

$$f(t) = \frac{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} * e^{\left(-\frac{t}{\beta}\right)}}{\beta * \Gamma(\alpha)}$$

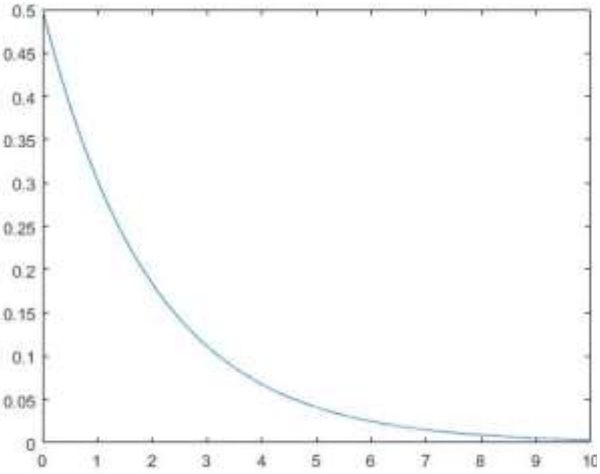
Dabei muss a > 1 gewählt werden, da ansonsten die Dichtefunktion gegen unendlich streben würde für t gegen 0_+. Für a > 1 strebt die Funktion gegen 0 für t gegen unendlich, was wiederum eine nützliche Eigenschaft ist.
Setzt man $(\alpha = 1)$ und berechnet den Wert bei f(0) erhält man $\frac{1}{\beta}$.

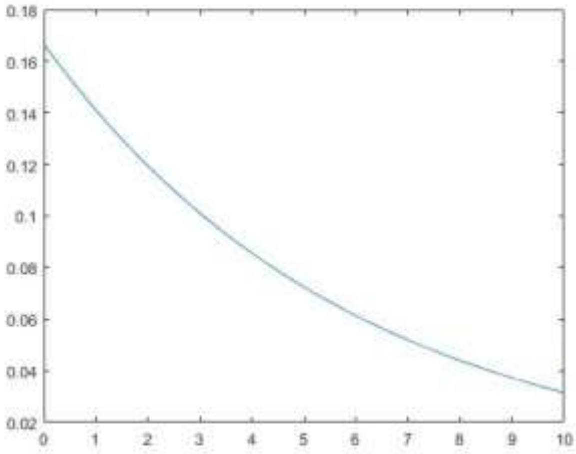
c)
Ersetzt man $\Gamma\left(\alpha,\frac{t}{\beta}\right)$ durch $\Gamma(\alpha, g(t))$ so ändert sich unsere Dichtefunktion in

$$f(t) = \frac{(g(t))^{\alpha-1} * e^{(-g(t))}}{\Gamma(\alpha)} * g(t)'$$

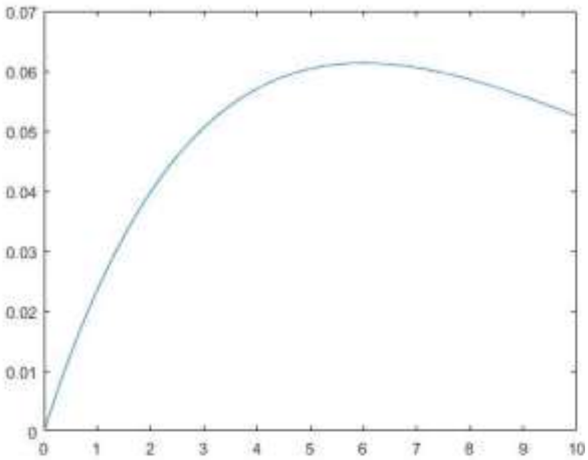
Für $(\alpha = 1)$ an der Stelle f(0), erhält man $\cancel{g(t)'}$. e^-g(0)*g'(0)

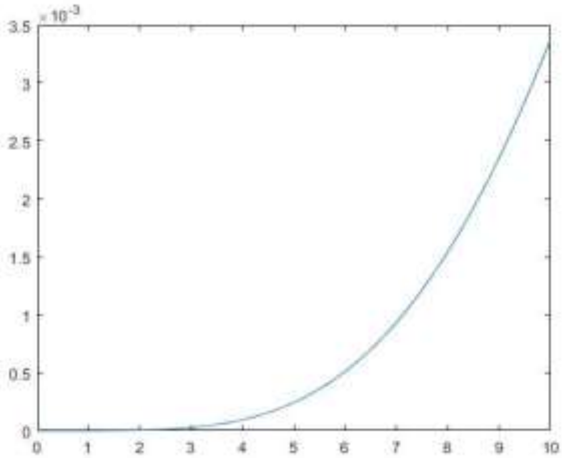
Grafen für verschiedene α und β:





Abbildungen 2/3: Einfluss von β auf den Grafen. Links is $\beta = 2$, rechts β = 6. $(\alpha = 1)$





Abbildungen 4/5: Diesesmal wurde nur α geändert. Links ist $\alpha = 2$, rechts ist $\alpha = 6$. $(\beta = 6)$