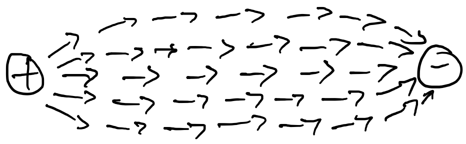
Aufgabe 4: Elektrischer Fluss

billf, danicola

Aufgabe a)



Aufgabe b)

Gegeben:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}|^3} * \vec{r}$$

Der Fluss berechnet sich folgendermassen:

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_B \vec{E}(x, y, z) * \vec{n}\, dO$$

Man Integriert also das Skalarprodukt des $\vec{E}$-Feldes und des Normalenvektors über den Rand des Bereiches.

Man darf hier nicht den Satz von Gauss anwenden, im Nullpunkt ist das E-Feld nämlich nicht definiert (man würde ja durch Null teilen).

Kugel

In einer Kugel $K: \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a\}$ mit Mittelpunkt $M = O$ ist der Normalenvektor am Punkt $\vec{r}$ gerade der normierte Ortsvektor des Punktes:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Schreibt man das aus erhält man:

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_K \frac{q\vec{r}}{|\vec{r}|^3} * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} dO$$

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_K \frac{q\vec{r}^2}{|\vec{r}|^4} dO$$

Es gilt weiter:

$$\vec{r}^2 = (x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + z^2 = |\vec{r}|^2$$

Und somit:

$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_K \frac{q}{|\vec{r}|^2} dO$$

Da man über den Kugelrand integriert gilt:

$$|\vec{r}|^2 = a^2$$

Und der Fluss vereinfacht sich zu:

$$\Phi = \frac{q}{a^2} \oint\!\!\!\oint_K 1\, dO$$

Dieses Integral ist wohlbekannt, es ist dies die Kugeloberfläche $4\Pi a^2$. Der gesuchte Fluss ist also:

$$\Phi = \frac{q}{a^2} * 4\Pi a^2 = \boldsymbol{4\Pi q}$$

Somit ist der Fluss durch die Kugeloberfläche unabhängig von deren Radius!

Zylinder

Ein Zylinder mit Höhe h und Radius a. der Mittelpunkt ist in der Mitte des Zylinders.

$$Z: \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\right\}$$

In Zylinderkoordinaten gilt: $x = r\cos(\phi)\,, y = r\sin(\phi)\,, z = z$

Um den Fluss durch den Zylinder zu berechnen wenden wir einen Trick an. Wir betrachten einen unendlich hohen Zylinder, setzen also für z ∞ und $-\infty$ ein. Wir können dadurch die Deckflächen vernachlässigen.

$$\Phi = \oiint_M \vec{E}(x, y, z) * \vec{n}\, dO$$

Der Normalenvektor zur Mantelfläche ist:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Fluss ist also:

$$\Phi = \oiint_M \frac{q\vec{r}}{|\vec{r}|^3} * \vec{n}\, dO = \oiint_M \frac{q(x \quad y \quad z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dO$$

Das Oberflächenelement in Zylinderkoordinaten beträgt $dO = r\, d\phi\, dz$. Da wir nur über den Rand des Zylinders Integrieren, ist der Radius konstant $r = a$ und somit $dO = a\, d\phi\, dz$. Das Integral wird also zu:

$$\Phi = \oiint_M \frac{q(x \quad y \quad z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} a\, d\phi\, dz = \oiint_M \frac{q(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3 \sqrt{x^2 + y^2}} a\, d\phi\, dz$$

a und q hängen weder von ϕ noch von z ab und lassen sich somit aus dem Integral heraus-ziehen.

$$\Phi = aq \oiint_M \frac{(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3 \sqrt{x^2 + y^2}} d\phi\, dz$$

Setzt man für x, y, z nun noch Zylinderkoordinaten ein erhält man:

$$\Phi = aq \oiint_M \frac{\left(a^2\cos^2(\phi) + a^2\sin^2(\phi)\right)}{\sqrt{a^2\cos^2(\phi) + a^2\sin^2(\phi) + z^2}^3 \sqrt{a^2\cos^2(\phi) + a^2\sin^2(\phi)}} d\phi\, dz$$

Wegen der Identität $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ vereinfacht sich das Ganze zu:

$$\Phi = aq \oiint_M \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + z^2}^3 a} d\phi\, dz = a^2 q \oiint_M \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}^3} d\phi\, dz$$

Die Integralgrenzen sind $-\infty \leq z \leq \infty$ und $0 \leq \phi \leq 2\Pi$.

$$\Phi = a^2 q \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\Pi} (a^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} d\phi\, dz$$

Das innere Integral ist nicht von ϕ abhängig, also ergibt sich nur ein Faktor 2Π:

$$\Phi = 2\Pi a^2 q \int_{-\infty}^{\infty} (a^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} dz = 2\Pi a^2 q \left[\frac{z}{a^2\sqrt{a^2 + z^2}}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$\Phi = \lim_{n\to\infty} 2\Pi q \left(\frac{n}{\sqrt{a^2 + n^2}} - \frac{-n}{\sqrt{a^2 + n^2}}\right) = 2\Pi q \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{a^2 + n^2}} = 4\Pi q \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \boldsymbol{4\Pi q}$$

Der Fluss durch den Zylinder hängt also auch nicht vom Radius und der Höhe ab.

Ellipsoid

$$\Phi = \oiint_E \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}\, dO$$

Das Skalarprodukt im Integral kann man Vereinfachen:

$$\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}}) * \vec{\mathrm{n}} = |\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})| * |\vec{\mathrm{n}}| * \cos\alpha = |\vec{\mathrm{E}}(\vec{\mathrm{r}})| * \cos\alpha = \frac{q}{\mathrm{r}^2} * \frac{\vec{\mathrm{r}}}{|\vec{\mathrm{r}}|} * \cos\alpha$$

In diesem Fall ist der Normalvektor $\vec{n}$ der normierte Normalvektor und so dessen Betrag 1. Ausserdem ist $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ auch gleich 1. Somit vereinfacht sich das Integral auf:

$$\Phi = \oiint_E \frac{q}{r^2} * \cos\alpha\, dO$$

Was jetzt noch störend ist, ist das Oberflächenelement dO, da wir die Oberfläche nicht genau beschreiben können. Da können wir uns aber Abhilfe schaffen mit dem Raumwinkel und der Einheitskugel, dessen Integral wohlbekannt ist. Wir projizieren sozusagen einfach unsere Ellipsoid Oberfläche auf die Einheitskugel, analog geht das auch für jede andere Oberfläche:

$$d\Omega = \frac{dO * \cos\alpha}{r^2}$$

In obiger Formel ist $d\Omega$ der Raumwinkel des Flächenelements auf der Einheitskugel, dA der Raumwinkel des Flächenelements auf dem Ellipsoid, r^2 der Abstand des Ellipsoid-Flächenelementes zum Ursprung und $\cos\alpha$ der Korrekturfaktor, da der Raumwinkel verzerrt ist, dabei ist α der Zwischenwinkel vom Ortsvektor und der Flächennormale.

$$dO = \frac{r^2 * d\Omega}{\cos\alpha}$$

$$\Phi = \oiint_E \frac{q}{r^2} * \cos\alpha\, \frac{r^2}{\cos\alpha}\, d\Omega = \oiint_E q d\Omega = q \oiint_E 1\, d\Omega = \boldsymbol{4\Pi q}$$

Nach diesem Prinzip lässt sich für jede beliebige geschlossene Oberfläche der elektrische Fluss berechnen.

Aufgabe c)

Der Satz von Gauss besagt, das der Fluss durch die Oberfläche eines abgeschlossenen Bereichs B gleich dem Integral der Divergenz des E-Feldes über das Volumen des Bereiches ist.

$$\Phi = \oiint_{\partial B} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{n}\, dO = \iiint_B \nabla\, \vec{E}(\vec{r})\, dV$$

Die Divergenz des E-Feldes ergibt günstigerweise gerade 0.

$$\nabla\, \vec{E}(\vec{r}) = \frac{d}{dx}\frac{qx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} + \frac{d}{dy}\frac{qy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} + \frac{d}{dz}\frac{qz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = 0$$

Somit hat man keinen Fluss, egal wie der Körper aussieht. Hat man aber Quellen im Inneren des Bereichs muss man den Fluss über die normale Formel berechnen und darf den Satz von Gauss nicht anwenden.

Aufgabe d)

Die Flüsse durch die beiden Oberflächen sind gleich und sind proportional zur gesamten Ladung die in V enthalten ist. Der Beweis ist analog zu b) Ellipsoid.