Musterlösungen Prüfung

1. (a) WF.
   (b) FWW.
   (c) FFF.
   (d) WW.

2. $$y' = (2x + y)^2$$

   Sei $u(x) = 2x + y(x)$. Dann ist $y = u - 2x$ und

   $$y' = u' - 2 = u^2.$$

   Die Differentialgleichung ist separierbar in u:

   $$u' = u^2 + 2$$
   $$\int \frac{du}{u^2 + 2} = \int dx$$
   $$\frac{1}{\sqrt{2}} arctan(\frac{u}{\sqrt{2}}) = x + C_1$$
   $$u = \sqrt{2} tan(\sqrt{2}x + C_2)$$
   $$y(x) = \sqrt{2} tan(\sqrt{2}x + C_2) - 2x.$$

3. Es gilt: $div(\vec{v}) = x^2 + y^2$. Nach dem Divergenzsatz von Gauss ist der gesuchten Fluss gleich

   $$\Phi = \iint_{\partial Z} \vec{v} \cdot \vec{n} d\mathcal{O} = \iiint_Z div(\vec{v}) dV = \iiint_Z (x^2 + y^2) dV.$$

   Mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi), z = z$ ist $dV = rdrd\phi dz$ und

   $$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_0^1 r^2 r dr dz d\phi = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2\pi = \pi.$$

4. Es gilt:

$$f(x) = \int_0^\pi \cos(x \cdot \sin(t))\, dt$$
$$f'(x) = -\int_0^\pi \sin(x \cdot \sin(t)) \sin(t)\, dt$$
$$f''(x) = -\int_0^\pi \cos(x \cdot \sin(t)) \sin^2(t)\, dt$$
$$f'''(x) = \int_0^\pi \sin(x \cdot \sin(t)) \sin^3(t)\, dt.$$

Für $x = 0$ ist also $f(0) = \int_0^\pi \, dt = \pi$, $f'(0) = 0$,

$$f''(0) = -\int_0^\pi \sin^2(t)\, dt \overset{F.u.T.}{=} -[\frac{1}{2}(t - \sin(t)\cos(t))]_0^\pi = -\frac{1}{2}\pi$$

und $f'''(0) = 0$. Also ist $P_3(x) = \pi - \frac{1}{4}\pi x^2$.

5. Nach dem Satz von Stokes ist

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}\, d\mathcal{O} = \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

die Arbeit von $\vec{v}$ entlang γ und ist unabhängig von S (sofern $\partial S = \gamma$). Wählen wir also $S_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ z = 0\}$. Da $\vec{n}_{S_1} = (0,0,1)$ und $\operatorname{rot}\vec{v} = (1,-1,1)$, kriegen wir

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}\, d\mathcal{O} = \iint_{S_1} \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}_{S_1}\, d\mathcal{O} = \text{Flächeninhalt}(S_1) = \pi R^2.$$

6. Eine Parabel mit Achse y und Scheitel $(0,1)$ hat die Form $y = cx^2 + 1$. Soll sie durch den Punkt (a,a) gehen, so folgt $c = \frac{a-1}{a^2}$. Eine Parametrisierung des Weges W_a ist durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{a-1}{a^2}t^2 + 1 \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq a$$

gegeben. Für die Arbeit $A(a)$ längs W_a erhält man dann

$$A(a) = \int\limits_{W_a} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int\limits_0^a \vec{v}\big(\vec{r}(t)\big)\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt = \int\limits_0^a \begin{pmatrix} \frac{a-1}{a^2}t \\ -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{(a-1)}{a^2}t \end{pmatrix} dt = \frac{a-1}{a^2}\int\limits_0^a (t-2)\,dt$$

$$= \frac{a-1}{a^2}\left(\frac{a^2}{2} - 2a\right) = \frac{a^2-5a+4}{2a}\ .$$

Man sucht nun das Minimum der Funktion $A(a)$ im offenen Intervall $(0,+\infty)$. Extremale Punkte findet man mit Hilfe der Ableitung

$$\frac{d}{da}A(a) = \frac{(2a-5)2a - 2(a^2-5a+4)}{4a^2} = \frac{2a^2-8}{4a^2} = 0 \iff a^2 = 4.$$

Man erhält im Intervall $(0,+\infty)$ die Lösung $a=2$. Man beachte noch, dass $A(a) \to +\infty$ für $a \to 0^+$ resp. $a \to +\infty$. Also ist in $a=2$ das Minimum (mit $A(2) = -\frac{1}{2}$) .

7. a) Durch Drehung um Winkel ϕ um die $z-$Achse des Kreises

$$\begin{cases} x &= R + r\sin(\psi) \\ y &= 0 \\ z &= r\cos(\psi) \end{cases}$$

kriegen wir eine Parametrisierung des Torus als

$$\vec{r}(\psi,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + r\sin(\psi) \\ 0 \\ r\cos(\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r\sin\psi)\cos\phi \\ (R + r\sin\psi)\sin\phi \\ r\cos\psi \end{pmatrix}.$$

b) Die Oberfläche ist gleich $\mathcal{O} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\vec{r}_\psi \times \vec{r}_\phi| d\psi d\phi$, wobei

$$|\vec{r}_\psi \times \vec{r}_\phi| = |\begin{pmatrix} r\cos\psi\cos\phi \\ r\cos\psi\sin\phi \\ -r\sin\psi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -(R + r\sin\psi)\sin\phi \\ (R + r\sin\psi)\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}| =$$

$$= |\begin{pmatrix} r(R + r\sin\psi)\cos\phi\sin\psi \\ r(R + r\sin\psi)\sin\phi\sin\psi \\ r(R + r\sin\psi)\cos\psi \end{pmatrix}| = \sqrt{r^2(R + r\sin\psi)^2} = r|R{+}r\sin\psi| = r(R{+}r\sin\psi).$$

Deswegen:

$$\mathcal{O} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\sin\psi)d\psi d\phi = 2\pi r\int_0^{2\pi}(R + r\sin\psi)d\psi =$$

$$= 2\pi r[2\pi R - r\cos\psi]_0^{2\pi} = 4\pi^2 rR.$$

8. (a) $\operatorname{rot}(\vec{v}) = (0,0,0)$.

   (b) i. eine Parametrisierung des weges γ_1 ist $\gamma_1(t) = (t,0,0), t \in [0,1]$. Die Arbeit ist gleich

$$W_{\gamma_1} = \int_0^1 \ln(1+t^2)\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2t\ln(1+t^2)dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1+t^2)(\ln(1+t^2)-1)\right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

   ii. Da $\operatorname{rot}(\vec{v}) = (0,0,0)$ und der Definitionsbereich von $\vec{v}$ einfach zusammenhängend ist, gilt

$$W_{\gamma_2} = W_{\gamma_1} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

9. Die Masse ist das Integral von der Dichte über das ganze Volumen. In Kugelkordinaten ergibt sich:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r)\, r^2 \sin(\vartheta)\, d\varphi d\vartheta dr \\ &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(r^2 + \frac{r^4}{R^2}\right) \sin(\vartheta)\, d\varphi d\vartheta dr = \\ &= 2\pi \int_0^R \int_0^\pi \left(r^2 + \frac{r^4}{R^2}\right) \sin(\vartheta)\, d\vartheta dr \\ &= 4\pi \int_0^R \left(r^2 + \frac{r^4}{R^2}\right) dr \\ &= 4\pi \left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5R^2}\right)\Bigg|_0^R = \\ &= \frac{32}{15}\pi R^3 \end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse erhalt man durch integration von $\rho(x,y,z)\left(x^2+y^2\right)$ über das ganze Volumen. In Kugelkoordinaten gilt $x^2+y^2 = r^2\sin^2(\vartheta)$. Daraus ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
I_z &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho\left(r\right) r^2 \sin^2\left(\vartheta\right) r^2 \sin\left(\vartheta\right) d\varphi d\vartheta dr \\
&= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(r^4 + \frac{r^6}{R^2}\right) \sin^3\left(\vartheta\right) d\varphi d\vartheta dr = \\
&= 2\pi \int_0^R \int_0^\pi \left(r^4 + \frac{r^6}{R^2}\right) \sin^3\left(\vartheta\right) d\vartheta dr = \\
&= \frac{8}{3}\pi \int_0^R \left(r^4 + \frac{r^6}{R^2}\right) dr = \\
&= \frac{32}{35}\pi R^5 = \frac{15}{35}\frac{32}{15}\pi R^3 R^2 = \frac{3}{7} M R^2
\end{aligned}
$$

10. In Matrixschreibweise lässt sich das System als

$$
\begin{pmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}
$$

schreiben. Die Matrix A besitzt die Eigenwerte $-k_1, -k_2$ und die Eigenräume

$$
E_{-k_1} = \operatorname{span}\{(k_2 - k_1, k_1)\} \quad \text{und} \quad E_{-k_2} = \operatorname{span}\{(0,1)\}.
$$

Die allgemeine Lösung des Systems ist also gleich

$$
\begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{pmatrix} = C e^{-k_1 t} \begin{pmatrix} k_2 - k_1 \\ k_1 \end{pmatrix} + D e^{-k_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung kriegen wir $C = \frac{1}{k_2 - k_1}$ und $D = \frac{-k_1}{k_2 - k_1}$ und also

$$
\begin{pmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-k_1 t} \\ \frac{k_1}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) \end{pmatrix}.
$$