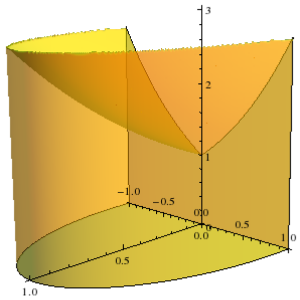
ETH Zürich | **Musterlösungen Basisprüfung** | Sommer 2014

D-MAVT & D-MATL | Analysis I & II | Prof. Dr. Urs Lang

1. (a) $I_0 = \int_0^1 e^r \,\mathrm{d}r = e^r\big|_0^1 = e - 1.$

$$I_n = \int_0^1 r^n e^r \,\mathrm{d}r = r^n e^r\big|_0^1 - n\int_0^1 r^{n-1} e^r \,\mathrm{d}r = e - nI_{n-1}, \text{ für } n \geq 1.$$



(b) Wegen der Symmetrien von B lassen sich in dieser Aufgabe die Berechnungen am einfachsten in zylindrischen Koordinaten durchführen. Wenn $\mathrm{d}V$ bzw. $\mathrm{d}\tilde{V}$ das Volumenelement in kartesischen bzw. zylindrischen Koordinaten bezeichnet, dann ist $\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\tilde{V}$. Ausserdem wird B nach der Koordinatentransformation auf

$$\tilde{B} = \left\{(\rho,\, \phi,\, z) \,:\, 0 \leq \rho \leq 1,\, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq z \leq e^\rho\right\}$$

abgebildet. Das Volumen von B ist also:

$$V(B) = \int_B \mathrm{d}V = \int_{\tilde{B}} \rho\,\mathrm{d}\tilde{V} = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{e^\rho} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho = \pi \underbrace{\int_0^1 \rho\, e^\rho\,\mathrm{d}\rho}_{=I_1}$$

$$= \pi \cdot (e - (e-1)) = \pi.$$

Wir berechnen jetzt die Integrale $\int_B x\,\mathrm{d}V$ und $\int_B y\,\mathrm{d}V$:

$$\int_B x\,\mathrm{d}V = \int_{\tilde{B}} \rho\cos\phi \cdot \rho\,\mathrm{d}\tilde{V} = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{e^\rho} \rho^2 \cos\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\,\mathrm{d}\phi\right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 \rho^2\, e^\rho\,\mathrm{d}\rho\right)}_{=I_2} = 2 \cdot (e - 2I_1)) = 2(e-2).$$

$$\int_B y\,\mathrm{d}V = \int_{\tilde{B}} \rho\sin\phi \cdot \rho\,\mathrm{d}\tilde{V} = \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{e^\rho} \rho^2 \sin\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \underbrace{\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right)}_{=0} \cdot \left(\int_0^1 \rho^2\, e^\rho\,\mathrm{d}\rho\right) = 0.$$

Hier könnte man auch aus den Symmetrien von B sehen, dass das zweite Integral gleich null ist. Somit sind die Koordinaten $\bar{x}$ und $\bar{y}$ des Schwerpunktes

$$\bar{x} = \frac{1}{V(B)} \int_B x\,\mathrm{d}V = \frac{2}{\pi}(e-2); \quad \bar{y} = \frac{1}{V(B)} \int_B y\,\mathrm{d}V = 0$$

Für das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse hat man

$$\Theta_z = \int_B \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}V = \int_{\tilde{B}} \left(\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi\right) \cdot \rho\,\mathrm{d}\tilde{V} = \int_{\tilde{V}} \rho^3\,\mathrm{d}\tilde{V}$$

$$= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{e^\rho} \rho^3 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho = \pi \underbrace{\int_0^1 \rho^3 e^\rho\,\mathrm{d}\rho}_{=I_3} = \pi \cdot (e - 3(e-2)) = 2\pi(3-e).$$

2. (a) Definiert man $(x(t), y(t)) := (t, \cosh t) = \alpha(t)$, so kann man die Krümmung durch die folgende Formel bestimmen:

$$k(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right)^{3/2}}.$$

Wir haben $\dot{\alpha}(t) = (1, \sinh t)$ und $\ddot{\alpha}(t) = (0, \cosh t)$. Dann ist

$$k(t) = \frac{\cosh t - 0}{\left(1 + \sinh^2 t\right)\right)^{3/2}} = \frac{\cosh t}{\left(\cosh^2 t)\right)^{3/2}} = \frac{1}{\cosh^2 t}.$$

Der Radius r_0 der Krümmungskreis an der Stelle $t = 0$ ist also

$$r_0 = \frac{1}{|k(0)|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{\cosh^2 0}\right|} = 1,$$

und sein Zentrum z_0 ist durch die folgende Formel gegeben:

$$z_0 = \alpha(0) + r_0 \cdot \frac{n(0)}{\|n(0)\|},$$

wobei $n : t \longmapsto n(t) = (-\dot{y}(t),\, \dot{x}(t))$ der Normalenvektor ist, welcher aus einer Drehung von $\dot{\alpha}(t)$ im Gegenuhrzeigersinn entsteht. Für n gilt:

$$n(t) = (-\sinh t,\, 1); \quad \|n(t)\| = \sqrt{(-\sinh t)^2 + 1^2} = \cosh t.$$

Somit ist

$$z_0 = (0,\, 1) + 1 \cdot \frac{(-\sinh 0,\, 1)}{\|\cosh 0\|} = (0, 2).$$

(b) Das Zentrum $z(t)$ des Kreises mit Radius r_0 und Berührpunkt $\alpha(t)$ wird parametrisiert wie folgt:

$$\begin{aligned} z(t) &= \alpha(t) + r_0 \cdot \frac{n(t)}{\|n(t)\|} = (t,\, \cosh t) + 1 \cdot \frac{(-\sinh t,\, 1)}{\cosh t} \\ &= \left(t - \tanh t,\, \cosh t + \frac{1}{\cosh t}\right). \end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsvektor dieser Kurve ist

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 t},\, \sinh t - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\right) = \frac{\cosh^2 - 1}{\cosh^2 t} \cdot (1, \sinh t) \\ &= \tanh^2 t \cdot (1, \sinh t) \end{aligned}$$

Somit ist $\dot{z}(0) = \tanh^2 0 \cdot (1, \sinh 0) = (0, 0)$.

3. Man soll zuerst feststellen, dass die Funktion f keine Extrema im Inneren des Ellipsoids B hat, denn

$$\mathbf{grad}\, f(x, y, z) = \left(\frac{2x}{1 + x^2},\, 2,\, 3\right) \neq (0,\, 0,\, 0).$$

Die Extrema von f treten also auf dem Rand

$$\partial B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6\}$$

von B auf. Um die kritischen Punkte von f auf ∂B zu bestimmen, setzen wir $g:\,(x,y,z)\longmapsto x^2+2y^2+3z^2=6$ (es ist klar, dass ∂B eine Niveaufläche von g ist) und lösen die Gleichung

$$\textbf{grad}\ f(x,y,z)=\lambda\cdot\textbf{grad}\ g(x,y,z)$$

nach (x,y,z,λ) auf. Da

$$\textbf{grad}\ g(x,y,z)=(2x,\ 4y,\ 6z)$$

ist, erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{cases}\frac{2x}{1+x^2}=2x\lambda & \text{(I)}\\ 2=4y\lambda & \text{(II)}\\ 3=6z\lambda & \text{(III)}\\ x^2+2y^2+3z^2=6 & \text{(IV)}\end{cases}$$

Aus (II) und (III) folgt, dass $\lambda\neq 0$ und $z=y$ gilt. Aus (I) ergibt sich

$$x=0\quad\text{oder}\quad\lambda=(1+x^2)^{-1}.$$

Für $x=0$ erhält man nach Einsetzen von x und z in (IV) die Gleichung $5y^2=6$, welche die Lösungen $y=\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$ hat. Man hat also die zwei Lösungen

$$\left(0,\,\sqrt{\frac{6}{5}},\,\sqrt{\frac{6}{5}}\right)\quad\text{und}\quad\left(0,\,-\sqrt{\frac{6}{5}},\,-\sqrt{\frac{6}{5}}\right).$$

Andererseits, wenn $x\neq 0$, dann muss $\lambda=(1+x^2)^{-1}$ gelten. Dies kombiniert mit (II) impliziert $2y=1+x^2$. Nochmal nach Einsetzen in (IV) von x^2 und z ergibt sich die quadratische Gleichung

$$5y^2+2y-7=0,$$

mit den Lösungen $y=1$ und $y=-\frac{7}{5}$. Aus der zweiten Lösung folgt jedoch, dass $x^2=-\frac{19}{5}$ ist; dies kann nicht passieren, denn wir suchen nach reellen Lösungen des Systems. In diesem Fall bekommen wir also nur Lösungen mit $y=1$, nämlich

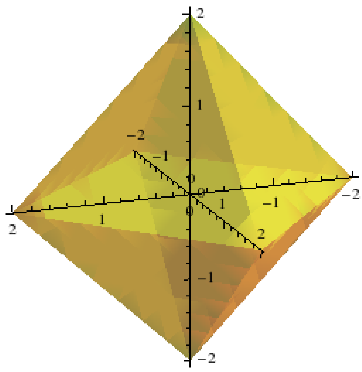
$$(1,\,1,\,1)\quad\text{und}\quad(-1,\,1,\,1)\,.$$

Schliesslich vergleichen wir in der nächsten Tabelle die Werte der Funktion f an den vier kritischen Stellen:

(x,y,z)	$\left(0,\,\sqrt{\frac{6}{5}},\,\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$	$\left(0,\,-\sqrt{\frac{6}{5}},\,-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$	$(1,\,1,\,1)$	$(-1,\,1,\,1)$
$f(x,y,z)$	$\sqrt{30}$	$-\sqrt{30}$	$5+\log 2$	$5+\log 2$

Das globale Maximum von f in B beträgt also $5+\log 2$ (mittels des Hinweises überprüft man, dass $5+\log 2>\frac{17}{3}>\sqrt{30}$) und wird in den Punkten $(1,\,1,\,1)$ und $(-1,\,1,\,1)$ angenommen. Das globale Minimum ist $-\sqrt{30}$ und wird an der Stelle $\left(0,\,-\sqrt{\frac{6}{5}},\,-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ erreicht.

4. Um den Fluss Φ von innen nach aussen durch die Oberfläche ∂B von B zu bestimmen, wendet man hier den Satz von Gauss an:



$$\Phi = \int_{\partial B} \vec{v} \bullet \vec{n} \, \mathrm{d}F = \int_B \mathbf{div}\, \vec{v} \, \mathrm{d}V,$$

wobei $\vec{n}$ ein nach aussen zeigender Einheitsvektor normal zu ∂B ist. Die Divergenz von $\vec{v}$ ist

$$\mathbf{div}\, \vec{v}(x,y,z) = 1 + 1 + 2z = 2(1+z).$$

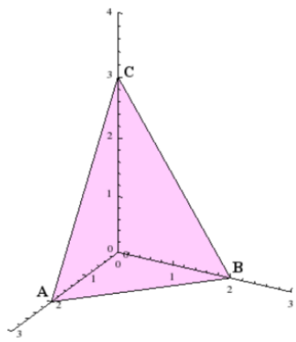
Dann ist der Fluss

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_B 2(1+z) \, \mathrm{d}V = 2 \int_{-2}^{2} \int_{|x|+|y| \,\le\, 2-|z|} (1+z) \, \mathrm{d}F \, \mathrm{d}z \\ &= \int_{-2}^{2} (1+z) \, F_z \, \mathrm{d}z = 2 \left\{ \int_{-2}^{2} F_z \, \mathrm{d}z + \int_{-2}^{2} z \, F_z \, \mathrm{d}z \right\}, \end{aligned}$$

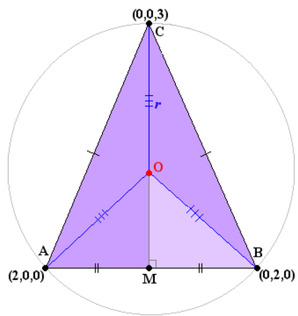
wobei $F_z = \int_{|x|+|y| \,\le\, 2-|z|} \mathrm{d}F$ den Flächeninhalt der Durchschnitt des Oktaeders und der zur xy-Ebene parallelen Ebene auf der Höhe z bezeichnet. Man soll bemerken, dass $F_{-z} = F_z$ für alle z. Daher ist der Integrand des zweiten Summanden eine ungerade Funktion, und das Integral $\int_{-2}^{2} z \, F_z \, \mathrm{d}z$ gleich null. Das erste Integral entspricht genau dem Volumen des Oktaeders. Also:

$$\Phi = 2 \int_{-2}^{2} F_z \, \mathrm{d}z = 2 \, V(B) = 2 \left(2 \cdot \frac{2F_0}{3} \right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{64}{3}.$$

5. (a) $\mathbf{rot}\, \vec{v}(x,y,z) = (1,1,-1)$.



(b) Wir suchen nach dem Radius r des Umkreises des gleichschenkligen Dreiecks ABC. Dieses Dreieck ist tatsächlich gleichschenklig, denn $AC = BC$. Man bezeichne durch O den Mittelpunkt des Umkreises; dieser sollte der Durchschnittspunkt der drei Mittelsenkrechten des Dreiecks sein. Insbesondere liegt O auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$, die, weil das Dreieck gleichschenklig ist, auch durch den Punkt C geht. Man nenne jetzt $M = (1,1,0)$ den Mittelpunkt von $\overline{AB}$; das Dreieck OMB ist rechtwinklig mit Hypotenusenlänge $OB = r$ und Kathetenlängen $MB = \sqrt{2}$ und $OM = CM - CO = \sqrt{11} - r$. Nach dem Satz des Pythagoras hat man



$$r^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{11} - r\right)^2 = 13 - 2\sqrt{11} r + r^2,$$

oder $r = \frac{13}{2\sqrt{11}}$.

(c) Um die Zirkulation von $\vec{v}$ langs γ zu bestimmen, wenden wir den Satz von Stokes an:

$$W = \int_\gamma \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \int_K \mathbf{rot}\, \vec{v} \bullet \vec{n} \, \mathrm{d}F;$$

hier bezeichnet K den von γ berandeten Kreis und $\vec{n}$ den Einheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|} \cdot = \frac{(-2,2,0) \times (-2,0,3)}{\|(-2,2,0) \times (-2,0,3)\|} = \frac{(3,3,2)}{\sqrt{22}}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} W &= \int_K \mathbf{rot}\, \vec{v} \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}F = \int_K (1,1,-1) \bullet \frac{(3,3,2)}{\sqrt{22}}\, \mathrm{d}F \\ &= \frac{4}{\sqrt{22}} \cdot F(K) = \frac{4}{\sqrt{22}} \cdot \pi \left(\frac{13}{2\sqrt{11}} \right)^2 = \frac{169\pi}{11\sqrt{22}}. \end{aligned}$$

6. (a) Da $x_1 = 2e^{i2\pi/3}$ eine Nullstelle von f ist, ist die konjugiert komplexe Zahl $x_2 = \bar{x}_1 = 2e^{-i2\pi/3}$ auch eine Nullstelle. Es gilt also

$$f(x) = \underbrace{(x - 2e^{i2\pi/3})(x - 2e^{-i2\pi/3})}_{=:p(x)} \cdot q(x)$$

für Polynome p und q zweiten Grades. Man hat

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 2e^{i2\pi/3})(x - 2e^{-i2\pi/3}) = x^2 - 2\left(e^{i2\pi/3} + e^{-i2\pi/3}\right) x + 4 \\ &= x^2 - 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) x + 4 = x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

und nach der schriftlichen Polynomdivision

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^4 \;\; + x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2 \right) \div \left(x^2 + 2x + 4\right) = x^2 - x + \frac{1}{2} \\ \underline{-\, x^4 - 2x^3 - 4x^2} \\ \qquad\quad -\, x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x \\ \qquad\quad \underline{\;\;\; x^3 + 2x^2 + 4x} \\ \qquad\qquad\qquad \frac{1}{2}x^2 \;\; + x + 2 \\ \qquad\qquad\quad \underline{-\, \frac{1}{2}x^2 \;\; - x - 2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

bekommt man $q(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$.

(b)

$$\begin{aligned} x_1 &= 2e^{i2\pi/3} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}. \\ x_2 &= \bar{x}_1 = 2e^{-i2\pi/3} = -1 - i\sqrt{3}. \\ x_{3,4} &= \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4} \\ x_4 = \frac{1-i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4}. \end{cases} \end{aligned}$$

7. Diese Aufgabe lässt sich auf verschiedene Weisen lösen: man kann z.B. die Differentialgleichung als exakt behandeln oder feststellen, dass sie linear ist mit separierbarer zugehöriger homogener Gleichung. Eine andere Möglichkeit ist, die linke Seite der Gleichung als die Ableitung eines Produktes zu betrachten:

$$\begin{aligned} & y'(1 + \cos x) - y\sin x = (y(1 + \cos x))' = 2x \\ \Longrightarrow & \int (y(1 + \cos x))'\, \mathrm{d}x = \int 2x\, \mathrm{d}x \\ \Longleftrightarrow &\quad y(1 + \cos x) = x^2 + C \Longleftrightarrow y = \frac{x^2 + C}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $y(1) = 0$ erhält man die Konstante $C = -1$. Die Lösung ist also

$$y(x) = \frac{x^2 - 1}{1 + \cos x}.$$

8. Die Gleichung ist äquivalent zu $yy' = \pm\sqrt{1 - y^2}$. Somit ist sie separierbar:

$$\begin{aligned}
yy' = \pm\sqrt{1-y^2} \implies \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} y' \mathrm{d}x &= \pm \int \mathrm{d}x \\
\iff \sqrt{1-y^2} &= \pm x + C_0 \\
\implies 1 - y^2 &= (\pm x + C_0)^2 = (x \pm C_0)^2 \\
\iff y &= \sqrt{1-(x-C)^2},
\end{aligned}$$

wobei $C = \mp C_0$. Man kann überprüfen, dass die Kurvenschar

$$y = \sqrt{1 - (x - C)^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

tatsächlich die allgemeine Lösung der originalen Differentialgleichung ist. Diese Schar beschreibt obere Halbkreise mit Radius 1 und Mittelpunkt auf der x-Achse (ohne die Punkte auf dieser Achse).

Geometrisch kann man feststellen, dass $y = 1$ eine Enveloppe der Kurvenschar und somit eine singuläre Lösung der Differentialgleichung ist. Dies lässt sich auch analytisch zeigen: wenn man $F(x, y, C) := (x - C)^2 + y^2 - 1$ definiert, müssen die Enveloppen die Gleichungen

$$(x - C)^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad F_C(x, y, C) = 2(x - C) = 0$$

erfüllen. Aus der zweiten Gleichung folgt $x = C$ und aus der ersten, dass $y = 1$ ist. Nach Einsetzen in der Differentialgleichung lässt sich überprüfen, dass diese konstante Funktionen sie auch erfüllt.

9. Mit Hilfe des Hinweises und der geometrischen Reihe lässt sich die Taylorreihe von f folgendermassen bestimmen:

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{5}{x^2 + x - 6} &= \frac{(x+3) - (x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{3}\right)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right\} x^n.
\end{aligned}$$

Hier konvergiert die Reihe $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ genau dann, wenn $|x| < 2$, und $f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n$, genau dann wenn $|x| < 3$. Also konvergiert die ganze Reihe für $|x| < 2$. Der Konvergenzradius ist $\rho = 2$, denn sonst würde $f_1(x) = -2\left(f(x) + \frac{1}{3} f_2(x)\right)$ für $2 < |x| < \min\{\rho, 3\}$ auch konvergieren.

10. WFWWFWFWWF