Paul Biran Sommer 2015

Musterlösungen zur Prüfung Analysis I/II

für D-MAVT/D-MATL

1. Multiple-Choice-Aufgabe.
(Die Reihenfolge bezieht sich auf Serie A der Prüfung.)

- Seien $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen, alle zweimal stetig differenzierbar.

  (a) Ist g positiv und monoton steigend, und ist f positiv und konvex, so ist $g \cdot f$ wieder konvex.

  Falsch. Ein einfaches Gegenbeispiel ist $g(x) := \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$ und $f(x) := 1$. Dann ist g positiv und monoton steigend, da $\arctan(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$; und f ist positiv und konvex (jedoch nicht strikt konvex); aber $g \cdot f = g$ ist weder konkav noch konvex, da $g''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt.
  Wem dieses Gegenbeispiel nicht gefällt, der nehme g wie oben, aber $f(x) := x^2+1$, was positiv und strikt konvex ist.

  (b) Sind g und h positiv und monoton steigend sowie f monoton fallend, dann ist $f \circ (g \cdot h)$ monoton fallend.

  Wahr. Wir berechnen die erste Ableitung von $f \circ (g \cdot h)$:

  $$(f \circ (gh))' = (f' \circ (gh)) \cdot (gh)' = (f' \circ (gh)) \cdot (g'h + gh').$$

  Da f monoton fallend ist, ist der erste Faktor $f' \circ (gh)(x) = f'(g(x)h(x)) \leq 0$ (egal was im f' drin steht). Da g und h positiv und monoton steigend sind, ist der zweite Faktor $g'h + gh' \geq 0$. Insgesamt ist der ganze Ausdruck ≤ 0, und damit ist $f \circ (gh)$ monoton fallend.

  (c) Ist f gerade und g ungerade, so ist $f \circ g$ wieder gerade.

  Wahr. Wir setzen ein:

  $$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x),$$

  da f gerade und g ungerade ist.

  (d) Sind f und g beide ungerade, so ist die Ableitung von $f \cdot g$ gerade.

  Falsch. Zunächst bemerken wir, dass die Ableitungen f' und g' beide gerade sind, da f und g ungerade sind (dies folgt aus der Definition der Ableitung als Differentialquotient). Wir setzen $-x$ in die Ableitung von fg ein:

  $$\begin{aligned}(fg)'(-x) &= (f'g + fg')(-x) = f'(-x)g(-x) + f(-x)g'(-x)\\ &= f'(x)(-g(x)) + (-f(x))g'(x) = -(f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\\ &= -(f'g + fg')(x) = -(fg)'(x).\end{aligned}$$

  Folglich ist $(fg)'$ ungerade.

- Sei $\vec{v}$ ein quellenfreies Vektorfeld, welches auf $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ definiert ist. Sei K_R die Vollkugel vom Radius R, zentriert im Ursprung. Dann gilt:

  (e) Der Fluss von $\vec{v}$ durch ∂K_R verschwindet.

Falsch. Man darf hier nicht direkt den Satz von Gauss anwenden, weil das Vektorfeld im Ursprung nicht definiert ist. Das klassische Gegenbeispiel ist das Gravitationsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = -C\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ mit

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{v}, \partial K_R) &= \iint_{\partial K_R} \vec{v} \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}\mathcal{O} = -C \iint_{\partial K_R} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \bullet \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\, \mathrm{d}\mathcal{O}(\vec{r}) \\ &= -C \iint_{\partial K_R} \underbrace{\frac{1}{|\vec{r}|^2}}_{=\frac{1}{R^2}}\, \mathrm{d}\mathcal{O}(\vec{r}) = -\frac{C}{R^2} \underbrace{\mathrm{Area}(\partial K_R)}_{=4\pi R^2} = -4\pi C.\end{aligned}$$

(f) Der Fluss von $\vec{v}$ durch ∂K_R ist unabhängig von R.

Wahr. Das folgt aus dem Satz von Gauss (Divergenzsatz) wie folgt: Betrachte die Kugelschale $S := \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid r \leq |\vec{w}| \leq R\}$, die als Rand die zwei Sphären ∂K_r und ∂K_R hat. Da $r > 0$, ist das Vektorfeld $\vec{v}$ nach Voraussetzung auf ganz S definiert und dort divergenzfrei. Mit dem Divergenzsatz folgt

$$0 = \iiint_S \operatorname{div} \vec{v}\, \mathrm{d}V = \iint_{\partial S} \vec{v} \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}\mathcal{O}.$$

Nun müssen wir den Rand $\partial S = \partial K_r \cup \partial K_R$ richtig orientieren, und zwar nach aussen von S her gesehen: also zeigt der Normalenvektor auf ∂K_r zum Ursprung hin und auf ∂K_R vom Ursprung weg. Es folgt

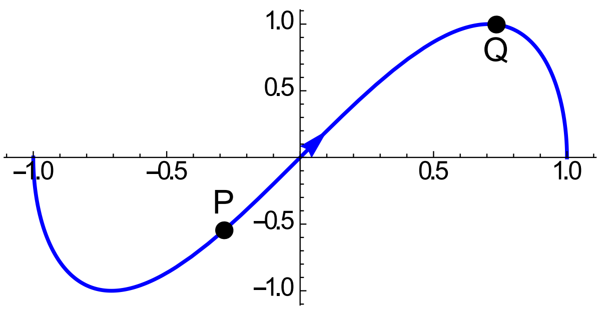
$$0 = \iint_{\partial S} \vec{v} \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}\mathcal{O} = \iint_{\partial K_R} \vec{v} \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}\mathcal{O} - \iint_{\partial K_r} \vec{v} \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}\mathcal{O} = \Phi(\vec{v}, \partial K_R) - \Phi(\vec{v}, \partial K_r).$$

Also ist der Fluss durch ∂K_R gleich dem durch ∂K_r. (Auch wenn der Normalenvektor zu Beginn anders gewählt wird, bleibt das Resultat bestehen.)

(g) Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist wirbelfrei.

Falsch. Wir können als Gegenbeispiel irgendein quellenfreies Vektorfeld nehmen, das nicht wirbelfrei ist. (Es spielt hier keine Rolle, dass $(0, 0, 0)$ nicht im Definitionsbereich ist.) Zum Beispiel ist $\vec{v}(x, y, z) := (z, x, y)$ divergenzfrei, aber $\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Bekanntere Beispiele sind das Geschwindigkeitsfeld eines rotierenden starren Körpers oder das Strömungsfeld nach Hagen-Poiseuille.

- Betrachten Sie die Kurve im Bild, die in Pfeilrichtung durchlaufen wird.



(h) Der Absolutwert der Krümmung in P ist grösser als in Q.

Falsch. Die Krümmung ist (bis auf das Vorzeichen) das Inverse des Krümmungsradius. Der Krümmungsradius wiederum ist der Radius des Kreises, welche die Kurve (in dem jeweiligen Punkt) am besten approximiert. Wenn wir in P und in

Q einen Kreis an die Kurve legen, so sehen wir, dass der Radius in Q echt kleiner sein wird als in P. Folglich ist die absolute Krümmung in Q echt grösser als in P.

(i) In den Punkten mit $-1 < x < -\frac{1}{2}$ ist die Krümmung positiv.

Wahr. Die Krümmung ist positiv, wenn der Weg eine Linkskurve beschreibt (und umgekehrt). Gemäss Pfeilrichtung beschreibt der Weg von $x = -1$ bis $x = 0$ eine Linkskurve.

- Es sei eine ebene Kurve gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(2t)), \quad \text{für } t \in [0, \pi].$$

(j) Dann ist eine explizite Darstellung dieser Kurve gegeben durch $y(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$, für $x \in [-1, 1]$.

Wahr. Um die explizite Darstellung zu erhalten, eliminieren wir den Parameter t. Wir benutzen die trigonometrische Identität $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ und erhalten den Zusammenhang

$$y = 2x\sin(t) \quad \text{mit } x = \cos(t).$$

Mit Hilfe der Identität $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ erhalten wir $y = \pm 2x\sqrt{1 - x^2}$. Um das Vorzeichen zu bestimmen, setzen wir $t = \frac{\pi}{4}$ in die Parametrisierung ein: es ergibt sich $\vec{r}(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$; und damit muss also für $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ auch $y = 1$ sein. Folglich ist

$$y(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

richtig.

2. Wir überprüfen zuerst, ob die Voraussetzungen für Bernoulli-Hôpital erfüllt sind. Ein Integral, das gleiche untere und obere Grenze (hier 0 für $h = 0$) hat, wertet zu Null aus. Also erhalten wir den Fall $\frac{0}{0}$. Ausserdem sind Integrale nach der oberen Grenze stets differenzierbar gemäss dem Hauptsatz der Analysis, und damit können wir Bernoulli-Hôpital anwenden.
Wir leiten zuerst das obere Integral ab. Mit dem oben erwähnten Hauptsatz und der Kettenregel erhalten wir (für $h > 0$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial h}\left\{\int_0^{h^2} t\cdot\ln\left(\frac{1}{t+1}+1\right)\mathrm{d}t\right\} &= t\cdot\ln\left(\frac{1}{t+1}+1\right)\Bigg|_{t=h^2}\cdot\frac{\partial}{\partial h}(h^2)\\ &= h^2\cdot\ln\left(\frac{1}{h^2+1}+1\right)\cdot 2h\\ &= 2h^3\cdot\ln\left(\frac{1}{h^2+1}+1\right).\end{aligned}$$

Ähnlich ergibt die Ableitung des unteren Integrals

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial h}\left\{\int_0^{2h} t^2\cdot\sin(t^2+t)\,\mathrm{d}t\right\} &= t^2\cdot\sin(t^2+t)\Bigg|_{t=2h}\cdot\frac{\partial}{\partial h}(2h)\\ &= (2h)^2\cdot\sin((2h)^2+2h)\cdot 2\\ &= 8h^2\sin(4h^2+2h).\end{aligned}$$

Wieder in den Grenzwert eingesetzt erhalten wir nach Bernoulli-Hôpital

$$\lim_{h\to0^+}\frac{\int_0^{h^2} t\cdot\ln\left(\frac{1}{t+1}+1\right)\mathrm{d}t}{\int_0^{2h} t^2\cdot\sin(t^2+t)\,\mathrm{d}t} = \lim_{h\to0^+}\frac{2h^3\cdot\ln\left(\frac{1}{h^2+1}+1\right)}{8h^2\sin(4h^2+2h)} = \lim_{h\to0^+}\frac{h\cdot\ln\left(\frac{1}{h^2+1}+1\right)}{4\sin(4h^2+2h)}.$$

Wenn wir nun hier oben und unten den Grenzwert für $h \to 0^+$ bilden, erhalten wir wieder den Fall $\frac{0}{0}$. Also wenden wir die Regel von Bernoulli-Hôpital noch einmal an.
Für den Zähler erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left\{h\cdot\ln\left(\tfrac{1}{h^2+1}+1\right)\right\} &= \ln\left(\tfrac{1}{h^2+1}+1\right) + h\cdot\frac{1}{\frac{1}{h^2+1}+1}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left\{\tfrac{1}{h^2+1}+1\right\}\\ &= \ln\left(\tfrac{1}{h^2+1}+1\right) + \frac{h}{\frac{1+(h^2+1)}{h^2+1}}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(h^2+1)^2}\cdot 2h\\ &= \ln\left(\tfrac{1}{h^2+1}+1\right) - \frac{2h^2}{(h^2+2)\cdot(h^2+1)}\end{aligned}$$

Für den Nenner erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left\{4\sin(4h^2+2h)\right\} = 4\cos(4h^2+2h)\cdot(8h+2) = 8\cos(4h^2+2h)\cdot(4h+1).$$

Eingesetzt in den Grenzwert, erhalten wir (und endlich dürfen wir $h = 0$ einsetzen!)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0^+}\frac{\int_0^{h^2} t\cdot\ln\left(\frac{1}{t+1}+1\right)\mathrm{d}t}{\int_0^{2h} t^2\cdot\sin(t^2+t)\,\mathrm{d}t} &= \lim_{h\to0^+}\frac{h\cdot\ln\left(\frac{1}{h^2+1}+1\right)}{4\sin(4h^2+2h)}\\ &= \lim_{h\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{h^2+1}+1\right)-\frac{2h^2}{(h^2+2)\cdot(h^2+1)}}{8\cos(4h^2+2h)\cdot(4h+1)}\\ &= \frac{\ln(\frac{1}{1}+1)-\frac{2\cdot0}{2\cdot1}}{8\cos(0)\cdot1} = \underline{\underline{\tfrac{1}{8}\ln 2}}.\end{aligned}$$

3. **Variante 1**: in kartesischen Koordinaten
Die Umrechnung in kartesische Koordinaten ist $x(\phi) = e^{3\phi}\cos(\phi)$, $y(\phi) = e^{3\phi}\sin(\phi)$.

(a) Zuerst müssen wir die Winkel $\phi = \alpha$ bzw. $\phi = \beta$ finden, wo die Kurve die gegebenen Punkte $P = (1, 0)$ bzw. $Q = (0, e^{\frac{3\pi}{2}})$ trifft.
Für den *ersten Punkt* erhalten wir $0 = y(\alpha) = e^{3\alpha}\sin(\alpha)$, also $\sin(\alpha) = 0$ (da die Exponentialfunktion immer positiv ist), und damit $\alpha = 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ausserdem $1 = x(\alpha) = e^{3\alpha}\cos(\alpha) = e^{3\alpha}$ (da $\alpha = 2\pi k$) und damit $\alpha = \frac{1}{3}\ln(1) = 0$.
Für den *zweiten Punkt* erhalten wir $0 = x(\beta) = e^{3\beta}\cos(\beta)$, also $\cos(\beta) = 0$ und damit $\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ($l \in \mathbb{Z}$). Ausserdem $e^{\frac{3\pi}{2}} = y(\beta) = e^{3\beta}\cos(\beta) = e^{3\beta}$, und damit $\beta = \frac{\pi}{2}$. — Insgesamt also $\alpha = 0$ und $\beta = \frac{\pi}{2}$.
Mit der Formel für die Bogenlänge einer Kurve, die in kartesischen Koordinaten $\vec{r}(\phi) = (x(\phi), y(\phi))$ gegeben ist, erhalten wir

$$S_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta |\dot{\vec{r}}(\phi)|\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\dot{x}(\phi))^2 + (\dot{y}(\phi))^2}\,\mathrm{d}\phi.$$

Für die benötigten Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{x}(\phi) &= e^{3\phi}(3\cos\phi - \sin\phi),\\ \dot{y}(\phi) &= e^{3\phi}(\cos\phi + 3\sin\phi);\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}(\dot{x}(\phi))^2 + (\dot{y}(\phi))^2 &= e^{6\phi}\left(9\cos^2\phi - 6\cos\phi\sin\phi + \sin^2\phi\right)\\ &\quad + e^{6\phi}\left(\cos^2\phi + 6\cos\phi\sin\phi + 9\sin^2\phi\right)\\ &= e^{6\phi}10\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) = 10e^{6\phi}.\end{aligned}$$

Folglich

$$S_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta |\dot{\vec{r}}(\phi)|\,\mathrm{d}\phi = \sqrt{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3\phi}\,\mathrm{d}\phi = \sqrt{10}\left[\frac{e^{3\phi}}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{10}}{3}\left(e^{\frac{3\pi}{2}} - 1\right)}}.$$

(b) Wir berechnen zuerst die zweiten Ableitungen der Koordinatenfunktionen:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(\phi) &= e^{3\phi}(9\cos\phi - 3\sin\phi) + e^{3\phi}(-3\sin\phi - \cos\phi) = e^{3\phi}(8\cos\phi - 6\sin\phi),\\ \ddot{y}(\phi) &= e^{3\phi}(3\cos\phi + 9\sin\phi) + e^{3\phi}(-\sin\phi + 3\cos\phi) = e^{3\phi}(6\cos\phi + 8\sin\phi).\end{aligned}$$

Gemäss der Formel für die Krümmung einer in kartesischen Koordinaten gegebenen Kurve erhalten wir

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}\\ &= \frac{e^{6\phi}(3\cos\phi - \sin\phi)(6\cos\phi + 8\sin\phi) - e^{6\phi}(\cos\phi + 3\sin\phi)(8\cos\phi - 6\sin\phi)}{(10e^{6\phi})^{3/2}}\\ &= \frac{e^{-3\phi}}{\sqrt{1000}} \cdot \big((18\cos^2\phi + 18\cos\phi\sin\phi - 8\sin^2\phi)\\ &\qquad - (8\cos^2\phi + 18\cos\phi\sin\phi - 18\sin^2\phi)\big)\\ &= \frac{e^{-3\phi}}{\sqrt{1000}} \cdot 10 \cdot (\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{10}\cdot e^{3\phi}}}}.\end{aligned}$$

(c) Die Evolute von $\vec{r}(\phi) = (x(\phi), y(\phi))$ ist gegeben als

$$\vec{e}(\phi) := \vec{r}(\phi) + \frac{1}{\kappa(\phi)} \cdot \vec{m}(\phi),$$

wobei $m(\phi) = \frac{\vec{n}(\phi)}{|\vec{n}(\phi)|}$ den Normaleneinheitsvektor bezeichnet und $\vec{n} = (-\dot{y}, \dot{x})$ die nach links gerichtete Normale ist. Damit gilt also für $\vec{e} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, dass

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - \dot{y}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}, \\ \tilde{x} &= y + \dot{x}\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}. \end{aligned}$$

Mit den bereits berechneten Funktionen erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= e^{3\phi}\cos\phi - e^{3\phi}(\cos\phi + 3\sin\phi)\frac{10e^{6\phi}}{10e^{6\phi}} = -3e^{3\phi}\sin\phi, \\ \tilde{y} &= e^{3\phi}\sin\phi + e^{3\phi}(3\cos\phi - \sin\phi)\frac{10e^{6\phi}}{10e^{6\phi}} = 3e^{3\phi}\cos\phi. \end{aligned}$$

Also lautet die Evolute in Parameterdarstellung $\underline{\underline{\vec{e}(\phi) = 3e^{3\phi}(-\sin\phi, \cos\phi)}}$.

Bemerkung: Das ist die gleiche Spirale wie zu Beginn, nur wurde sie um den Winkel $\frac{\ln 3}{3} - \frac{\pi}{2}$ gedreht.

Variante 2: in Polarkoordinaten
Wir berechnen zuerst die ersten beiden Ableitungen der Radiusfunktion $\rho(\phi) = e^{3\phi}$:

$$\rho'(\phi) = 3e^{3\phi}, \quad \rho''(\phi) = 9e^{3\phi}.$$

(a) In Polarkoordinaten erhalten wir für die Bogenlänge

$$\begin{aligned} S_\alpha^\beta &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{e^{6\phi} + (e^{3\phi} \cdot 3\phi)^2}\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{10e^{6\phi}}\,\mathrm{d}\phi \\ &= \sqrt{10}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3\phi}\,\mathrm{d}\phi = \sqrt{10}\left[\frac{e^{3\phi}}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{10}}{3}\left(e^{\frac{3\pi}{2}} - 1\right)}}. \end{aligned}$$

(b) Gemäss der Formel für die Krümmung einer in Polarkoordinaten gegebenen Kurve erhalten wir

$$\kappa = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}} = \frac{e^{6\phi} + 18e^{6\phi} - 9e^{6\phi}}{(e^{6\phi} + 9e^{6\phi})^{3/2}} = \frac{10e^{6\phi}}{\sqrt{1000} \cdot e^{9\phi}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{10} \cdot e^{3\phi}}}}.$$

(c) Wie bei **Variante 1**.

4. Variante 1: Transformation gemäss Hinweis (auf eine DGL mit konstanten Koeffizienten). Wir berechnen zuerst die Ableitungen von $z(t)$, wobei wir e^t wieder mit x ersetzen:

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(e^t) = y'(e^t)e^t = y'(x)x, \\ z''(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{y'(e^t)e^t\right\} = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = y''(x)x^2 + y'(x)x. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $z''(t)$ genau die linke Seite unserer ursprünglichen Gleichung, und rechts steht $\lambda^2 y(x) = \lambda^2 y(e^t) = \lambda^2 z(t)$. Die transformierte DGL lautet also

$$z''(t) - \lambda^2 z(t) = 0,$$

was eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten darstellt.

(a) Mit $\lambda = 0$ vereinfacht sich die Gleichung zu $z''(t) = 0$, was wir direkt zu $z(t) = At + B$ integrieren können (dabei sind $A, B \in \mathbb{R}$ Konstanten). Nun müssen wir die Transformation $x = e^t$ rückwärts machen und erhalten $t = \ln x$. Also ist

$$y(x) = z(\ln x) = A \ln x + B$$

die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung. Die Anfangsbedingungen ergeben

$$0 = y(1) = B \quad \text{und} \quad 1 = y'(1) = A,$$

also ist $\underline{\underline{y(x) = \ln(x)}}$ die gesuchte Lösung.

(b) Die transformierte DGL lösen wir mit dem Exponentialansatz. Das charakteristische Polynom[1] lautet

$$\mu^2 - \lambda^2 = 0,$$

also erhalten wir die zwei Lösungen $\mu = \pm\lambda$ (nach Voraussetzung ist $\lambda > 0$). Folglich ist die allgemeine Lösung durch $z(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t}$ gegeben ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sind Konstanten). Wir transformieren zurück und erhalten

$$y(x) = z(\ln x) = C_1 e^{\lambda \ln x} + C_2 e^{-\lambda \ln x} = C_1 x^\lambda + C_2 x^{-\lambda}$$

als allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung. Die Anfangsbedingungen ergeben

$$0 = y(1) = C_1 + C_2 \quad \text{und} \quad 1 = y'(1) = C_1\lambda + C_2(-\lambda);$$

es folgt $C_1 = \frac{1}{2\lambda}$ und $C_2 = -\frac{1}{2\lambda}$; damit ist

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{2\lambda}\left(x^\lambda - \frac{1}{x^\lambda}\right)}}$$

die gesuchte Lösung.

Variante 2: Indexpolynom (da Euler'sche Differentialgleichung)
Der Ansatz $y(x) = x^\alpha$ führt, wie bekannt, auf das Indexpolynom

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha = \lambda^2.$$

Daraus erhalten wir $\alpha^2 = \lambda^2$, folglich $\alpha = \pm\lambda$.

(a) Für $\lambda = 0$ erhalten wir die doppelte Nullstelle $\alpha = 0$ und deshalb die allgemeine Lösung $y(x) = C_1 x^0 + C_2 x^0 \ln x = C_1 + C_2 \ln x$. Wie bei der obigen Variante ergeben die Anfangsbedingungen die gesuchte Lösung $\underline{\underline{y(x) = \ln(x)}}$.

[1] Wir haben hier μ als Variable für das charakteristische Polynom verwendet, weil λ bereits gebraucht wurde.

(b) Die allgemeine Lösung lautet hier $y(x) = C_1 x^\lambda + C_2 x^{-\lambda}$ wie oben; die gesuchte Lösung $\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{2\lambda}\left(x^\lambda - \frac{1}{x^\lambda}\right)}}$ ergibt sich durch die Anfangsbedingungen.

5. **(a)** Wir bezeichnen die Koordinaten von $\vec{v}$ mit

$$\vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$$

und die Ableitungen mit tiefgestelltem x, y, z. Wir rechnen

$$\operatorname{rot}(f \cdot \vec{v}) = \begin{pmatrix} (fv_3)_y - (fv_2)_z \\ (fv_1)_z - (fv_3)_x \\ (fv_2)_x - (fv_1)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_y v_3 + f v_{3,y} - f_z v_2 - f v_{2,z} \\ f_z v_1 + f v_{1,z} - f_x v_3 - f v_{3,x} \\ f_x v_2 + f v_{2,x} - f_y v_1 - f v_{1,y} \end{pmatrix};$$

$$f \cdot \operatorname{rot}(\vec{v}) = f \cdot \begin{pmatrix} v_{3,y} - v_{2,z} \\ v_{1,z} - v_{3,x} \\ v_{2,x} - v_{1,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f v_{3,y} - f v_{2,z} \\ f v_{1,z} - f v_{3,x} \\ f v_{2,x} - f v_{1,y} \end{pmatrix};$$

$$\operatorname{grad}(f) \times \vec{v} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_y v_3 - f_z v_2 \\ f_z v_1 - f_x v_3 \\ f_x v_2 - f_y v_1 \end{pmatrix}.$$

Daraus kann man die Identität direkt koordinatenweise ablesen.

Bemerkung: Da grad und rot Differentialoperatoren für Skalar- bzw. Vektorfelder sind, ist diese Identität quasi eine verallgemeinerte Produktregel.

(b) **Variante 1**: direkt
Die Arbeit von $f \cdot \vec{v}$ entlang γ ist definiert durch

$$W(f \cdot \vec{v}, \gamma) = \int_\gamma (f \cdot \vec{v}) \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \Big(f(\gamma(t)) \cdot \vec{v}(\gamma(t))\Big) \bullet \dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir berechnen die einzelnen Komponenten dieser Formel zu

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= 2(2\cos(2\pi t))^2 + 2(2\sin(2\pi t))^2 + 3 \cdot 0^2 = 8\cos^2(2\pi t) + 8\sin^2(2\pi t) = 8; \\ |\gamma(t)| &= 2 \quad (\text{da } \gamma \text{ auf } S \text{ verläuft}) \\ \vec{v}(\gamma(t)) &= -C\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|^3} = -\frac{C}{4}(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0); \\ \dot{\gamma}(t)) &= (-2\sin(2\pi t) \cdot 2\pi, 2\cos(2\pi t) \cdot 2\pi, 0) = 4\pi(-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t), 0). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} W(f \cdot \vec{v}, \gamma) &= \int_0^1 \Big(f(\gamma(t)) \cdot \vec{v}(\gamma(t))\Big) \bullet \dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 8 \cdot (-\frac{C}{4}) \cdot 4\pi \cdot (-\cos(2\pi t)\sin(2\pi t) + \sin(2\pi t)\cos(2\pi t) + 0)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = \underline{\underline{0}}. \end{aligned}$$

Variante 2: mit Stokes
Mit dem Integralsatz von Stokes erhalten wir

$$W(f \cdot \vec{v}, \gamma) = \int_\gamma (f \cdot \vec{v}) \bullet \mathrm{d}\vec{r} = \iint_F \operatorname{rot}(f \cdot \vec{v}) \bullet \vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{O}.$$

Hierbei bezeichnet F eine Fläche, die von γ berandet wird; und $\vec{n}$ bezeichnet den Normaleneinheitsvektor auf F, der mit der Orientierung von γ kompatibel ist. Wir wählen als Fläche F (beispielsweise) die obere Halbkugel

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0\}$$

die von γ berandet wird. Da γ von oben gesehen im Gegenuhrzeigersinn am Äquator von S entlangläuft, wählen wir für $\vec{n}$ den nach aussen zeigenden Normaleneinheitsvektor auf der Sphäre. (Für einen Punkt $\vec{r} = (x, y, z)$ ist er gegeben durch $\vec{n}(x, y, z) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.)
Wir können nun die Identität aus Teilaufgabe **(a)** benützen und erhalten

$$\begin{aligned} W(f \cdot \vec{v}, \gamma) &= \iint_F \operatorname{rot}(f \cdot \vec{v}) \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}\mathcal{O} \\ &= \iint_F f \cdot \operatorname{rot}(\vec{v}) \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}\mathcal{O} + \iint_F \big(\operatorname{grad}(f) \times \vec{v}\big) \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}\mathcal{O}. \end{aligned}$$

Nun ist aber $\operatorname{rot}(\vec{v}) = 0$, wie man schnell überprüft (und aus der Vorlesung bekannt ist). Der erste Term ist also Null. Ausserdem ist $\operatorname{grad}(f) \times \vec{v}$ ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{v}$ steht, nach den allgemeinen Regeln des Kreuzprodukts. Nun ist aber $\vec{v}(\vec{r}) = -C\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ ein Vektor parallel zum Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$. Folglich steht also der Vektor $\operatorname{grad}(f) \times \vec{v}$ immer senkrecht auf $\vec{n}$, und damit ist das Skalarprodukt $(\operatorname{grad}(f) \times \vec{v}) \bullet \vec{n}$ immer Null. Also verschwindet auch der zweite Term! Wir erhalten

$$W(f \cdot \vec{v}, \gamma) = \underline{\underline{0}}.$$

Wem obige Überlegungen nicht behagen, kann auch die Rotation explizit ausrechnen und erhält

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(f \cdot \vec{v})(\vec{r}) &= f \cdot \operatorname{rot}(\vec{v}) + \operatorname{grad}(f) \times \vec{v} \\ &= 0 + \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{-C}{|\vec{r}|^3} = -\frac{C}{|\vec{r}|^3} \begin{pmatrix} -2yz \\ 2xz \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2Cz}{|\vec{r}|^3} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Normalenvektor auf F ist gegeben durch $\frac{(x,y,z)}{|\vec{r}|}$ (für einen Punkt $\vec{r} = (x, y, z) \in F$), also ergibt sich

$$W(f \cdot \vec{v}, \gamma) = \iint_F \operatorname{rot}(f \cdot \vec{v}) \bullet \vec{n}\, \mathrm{d}\mathcal{O} = \iint_F \frac{2Cz}{|\vec{r}|^4} \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=yx-xy=0} \mathrm{d}\mathcal{O} = \underline{\underline{0}}.$$

6. Variante A: Explizite Darstellung

(a) Stellen wir die Feldlinie von $\vec{v}$ als eine explizite Funktion $y(x)$ dar, so gilt gemäss der Vorlesung die Differentialgleichung

$$y' = \frac{9x}{-4y},$$

Diese ist separierbar zu $4y\,\mathrm{d}y = -9x\,\mathrm{d}x$; welches wir zu

$$\int 4y\,\mathrm{d}y = \int -9x\,\mathrm{d}x \quad\Longleftrightarrow\quad y^2 = -\tfrac{9}{4}x^2 + C$$

integrieren können. Mit der Anfangsbedingung $y(1) = 0$ erhalten wir $C = \frac{9}{4}$ und damit ergibt sich die implizite Gleichung $y^2 = \frac{9}{4}(1-x^2)$ für die Lösungskurven oder schöner

$$\underline{\underline{x^2 + \left(\frac{y}{\frac{3}{2}}\right)^2 = 1.}}$$

Eine explizite Darstellung ist gegeben durch die beiden Kurven

$$\underline{\underline{y(x) = \pm\tfrac{3}{2}\sqrt{1-x^2},}} \quad \text{für } x \in [-1,1].$$

(b) Die implizit dargestellte Kurve aus **(a)** ist eine Ellipse mit Zentrum $(0,0)$ und Halbachsen 1 bzw. $\frac{3}{2}$ auf den Koordinatenachsen x bzw. y. Wir parametrisieren sie wie üblich und erhalten

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \underline{\underline{(\cos(t), \tfrac{3}{2}\sin(t))}}.$$

Zur Kontrolle: Es gilt $\gamma(0) = (1,0)$ und die Ellipse wird im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen (betrachte z. B. $\dot\gamma(0) = (0, \frac{3}{2})$).

(c) Es gilt $\gamma(2\pi) = (1,0)$, und das ist das erste Mal nach $t = 0$, wo wir zum Anfangspunkt zurückkehren. Der Weg wird also von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ genau einmal durchlaufen.

Variante 1: direkt

Die Arbeit ist definiert als

$$\begin{aligned}
W(\vec v, \gamma) &= \int_\gamma \vec v \bullet \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} v(\gamma(t)) \bullet \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -4y \\ 9x \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -6\sin(t) \\ 9\cos(t) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \frac{3}{2}\cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} 6\sin^2(t) + \tfrac{27}{2}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 6\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t}_{=\pi} + \tfrac{27}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t}_{=\pi} = (6 + \tfrac{27}{2})\pi = \underline{\underline{\tfrac{39}{2}\pi}}.
\end{aligned}$$

Variante 2: mit Stokes

Mit dem Integralsatz von Stokes erhalten wir

$$W(\vec v, \gamma) = \int_\gamma \vec v \bullet \mathrm{d}r = \iint_E \operatorname{rot}(\vec v) \bullet \vec n\,\mathrm{d}\mathcal{O}.$$

Hierbei bezeichnet E die Ellipsenfläche, welche von γ berandet wird; und $\vec n$ bezeichnet den (im Raum $\mathbb{R}^3$) nach oben zeigenden Normaleneinheitsvektor $(0,0,1)$. (Dieser ist kompatibel mit der Orientierung der Ellipsenkurve γ.) Wir verstehen dabei $\vec v(x,y,z) = (-4y, 9x, 0)$ als dreidimensionales Vektorfeld mit Rotation

$$\operatorname{rot}(\vec v)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9+4 \end{pmatrix}$$

und damit gilt

$$W(\vec{v},\gamma) = \iint_E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\mathcal{O} = 13 \cdot \mathrm{Area}(E) = 13 \cdot \pi \cdot 1 \cdot \tfrac{3}{2} = \underline{\underline{\tfrac{39}{2}\pi}}.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass die Fläche einer Ellipse mit Halbachsen a und b gleich πab ist.

Variante B: Definition der Feldlinie/Integralkurve

(a) und (b) Die Definition einer Feldlinie $\gamma = (x, y)$ ist, dass sie die Differentialgleichung $\dot{\gamma} = \vec{v} \circ \gamma$ löst. In Komponenten aufgeschrieben ergibt dies das DGL-System

$$\dot{x} = -4y, \quad \dot{y} = 9x.$$

Wir leiten ein zweites Mal ab und erhalten

$$\ddot{x} = -4\dot{y} = -36x, \quad \ddot{y} = 9\dot{x} = -36\dot{y}.$$

Wir lösen (beispielsweise) die linke Differentialgleichung auf. Es ist eine homogene, lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die sich folglich mit dem Exponentialansatz lösen lässt. Ihr charakteristisches Polynom ist

$$\lambda^2 + 36 = 0, \text{ es folgt } \lambda = \pm 6i.$$

Also ist die allgemeine Lösung durch $x(t) = C_1 \cos(6t) + C_2 \sin(6t)$ gegeben (hierbei sind $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten). Wenn wir den Zusammenhang $y = -\frac{1}{4}\dot{x}$ benützen, erhalten wir für y die allgemeine Lösung $y(t) = -\frac{3}{2}C_2 \cos(6t) + \frac{3}{2}C_1 \sin(6t)$.
Wir setzen die Anfangsbedingung $\gamma(0) = (1, 0)$ ein und erhalten

$$1 = x(0) = C_1, \quad 0 = y(0) = \tfrac{3}{2}C_2;$$

woraus $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ folgt, also ist die gesuchte Lösung gleich

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \underline{\underline{(\cos(6t), \tfrac{3}{2}\sin(6t))}}.$$

Bemerkung: Dies ist die gleiche Kurve wie oben, nur dreimal so schnell durchlaufen.
Für eine implizite/explizite Darstellung können wir die Gleichung $\cos^2 + \sin^2 = 1$ benutzen, damit gilt

$$x(t)^2 + \left(\frac{y(t)}{\frac{3}{2}}\right)^2 = 1; \qquad \text{also } \underline{\underline{x^2 + \tfrac{4}{9}y^2 = 1}}$$

und $\underline{\underline{y(x) = \pm\frac{3}{2}\sqrt{1 - x^2}}}$ wie oben.

(c) Hier ist nun $\gamma(\frac{2\pi}{3}) = (1, 0)$, und der Weg wird von $t = 0$ bis $t = \frac{2\pi}{3}$ genau einmal durchlaufen. Der Rest ist analog wie oben.

7. Variante 1: Analytisch

Für einen Punkt $(x, y, z) \in G$ definieren wir die quadrierte Abstandsfunktion

$$f(x, y) := |(x, y, z) - P_0|^2 = (x-1)^2 + y^2 + (y^2 - 2x - 1)^2.$$

Diese ist zu minimieren – wir setzen also die partiellen Ableitungen gleich Null:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2(x-1) + 2(y^2 - 2x - 1) \cdot (-2) && \stackrel{!}{=} 0; \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y + 2(y^2 - 2x - 1) \cdot 2y && \stackrel{!}{=} 0;
\end{aligned}$$

und erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
x - 1 - 2y^2 + 4x + 2 = 0 \quad &\iff \quad 2y^2 - 5x - 1 = 0, && \text{(I)} \\
y + 2y(y^2 - 2x - 1) = 0 \quad &\iff \quad y(2y^2 - 4x - 1) = 0. && \text{(II)}
\end{aligned}$$

Aus Gleichung (II) erhalten wir zwei Fälle.
Im *ersten Fall* ist $y = 0$, und aus (I) ergibt sich $x = -\frac{1}{5}$. Damit ist ein Kandidat $P = (-\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5})$ mit dem Abstand $\sqrt{f(-\frac{1}{5}, 0)} = \sqrt{(-\frac{6}{5})^2 + (-\frac{3}{5})^2} = \frac{\sqrt{45}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$.
Im *zweiten Fall* ist $y \neq 0$, also

$$\begin{aligned}
2y^2 - 5x - 1 &= 0 \\
2y^2 - 4x - 1 &= 0.
\end{aligned}$$

Wir subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten und erhalten $x = 0$. Damit erhalten wir $2y^2 = 1$, also $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Zwei weitere Kandidaten sind also die Punkte $\pm Q = (0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ mit dem Abstand $\sqrt{f(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})} = \sqrt{1^2 + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.
Es ist nur zu entscheiden, welcher Abstand kürzer ist. Wegen

$$(\tfrac{\sqrt{7}}{2})^2 = \tfrac{7}{4} < \tfrac{9}{5} = \tfrac{45}{25} = (\tfrac{\sqrt{45}}{5})^2$$

ist also der kleinste Abstand gleich $\underline{\underline{\frac{\sqrt{7}}{2}}}$ und wird bei den Punkten $\underline{\underline{(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})}}$ angenommen.

Variante 2: Geometrisch

Der kürzeste Abstand zu einem Punkt auf dem Graphen muss entlang der Normale sein, wie wir in der Vorlesung gelernt haben. Das bedeutet, unser Punkt P_0 muss vom Graph G durch ein Vielfaches des Normalenvektor erreicht werden. Anders gesagt, es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $P + \lambda \cdot \vec{n}(P) = P_0$, wobei $P = (x, y, z) \in G$ der gesuchte Punkt ist und $\vec{n}(P)$ der Normalenvektor auf G in P bezeichnet. Der Normalenvektor auf den Graphen G der Funktion $z = y^2 - 2x$ ist gegeben durch $\vec{n}(x, y, z) = (-2, 2y, -1)$, also folgt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} = P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \iff \quad \left\{ \begin{aligned} x - 2\lambda &= 1 && \text{(I)} \\ y + 2\lambda y &= 0 && \text{(II)} \\ z - \lambda &= 1. && \text{(III)} \end{aligned} \right.$$

Aus (I) und (III) erhalten wir $x - 1 = 2\lambda = 2z - 2$, also $x + 1 = 2z$. Da der Punkt $P = (x, y, z)$ auf dem Graphen liegen soll, gilt ausserdem $z = y^2 - 2x$, also $x + 1 = 2z = 2y^2 - 4x$, folglich $5x + 1 = 2y^2$. Aus (II) erhalten wir zwei Fälle.
Im ersten Fall ist $y = 0$ und damit $5x + 1 = 0$, d. h. $x = -\frac{1}{5}$. Im zweiten Fall ist

$y \neq 0$, also $\lambda = -\frac{1}{2}$ und mit (I) also $x = 1+2\lambda = 0$. Damit folgt $y^2 = \frac{1}{2}(5x+1) = \frac{1}{2}$ und also $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Siehe **Variante 1**.

Variante 2b:
Anstatt dem Ansatz $P + \lambda \cdot \vec{n}(P) = P_0$ können wir auch Folgendes sagen: Der Vektor $P_0 - P$ soll parallel zum Normalenvektor $\vec{n}(P)$ sein; und das geschieht genau dann, wenn ihr Kreuzprodukt verschwindet. Wir berechnen also

$$(P_0 - P) \times \vec{n}(P) = \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ 1-z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(2z-1) \\ 2z-1-x \\ 2xy \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Fall $y = 0$ führt mit der zweiten Zeile auf $x = 2z-1$ und damit $z = y^2 - 2x = -4z+2$, also $z = \frac{2}{5}$ und also $x = 2z+1 = -\frac{1}{5}$. Im Fall $y \neq 0$ erhalten wir mit der letzten Zeile $x = 0$ und mit der ersten $z = \frac{1}{2}$. Damit also $y = \pm\sqrt{z+2x} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bemerkung: Es war nicht verlangt zu zeigen, dass überhaupt ein Minimum existiert (es könnte sich bei unseren Kandidaten auch nur um Sattelpunkte der Distanzfunktion handeln). Da es sich bei G um einen Graphen handelt, wird der Abstand von P_0 zu Punkten auf G immer grösser, je weiter wir uns auf der (x,y)-Ebene von P_0 wegbewegen. Da die Funktion stetig ist, muss es also ein Minimum geben. Da f überall differenzierbar ist, muss dieses Minimum unter unseren Kandidaten liegen.

8. **Variante 1**: Elliptische Zylinderkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad \text{mit den Grenzen} \quad \left\{\begin{aligned} &\phi \in [0, 2\pi] \\ &\rho \in [0,1] \\ &z \in [0, x+y+3] = [0, \rho(2\cos\phi + \sin\phi) + 3]. \end{aligned}\right.$$

Die Jacobi-Determinante berechnet sich zu

$$\left|\det\begin{pmatrix} x_\phi & x_\rho & x_z \\ y_\phi & y_\rho & y_z \\ z_\phi & z_\rho & z_z \end{pmatrix}\right| = \left\|\begin{matrix} -2\rho\sin\phi & 2\cos\phi & 0 \\ \rho\cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = |-2\rho\sin^2\phi - 2\rho\cos^2\phi| = 2\rho.$$

Also ist das gesuchte Volumen gleich

$$\begin{aligned} \iiint_Z \mathrm{d}V &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{x+y+3} 2\rho \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho = \int_0^1 \int_0^{2\pi} [z]_0^{\rho(2\cos\phi+\sin\phi)+3} \cdot 2\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2\rho^2(2\cos\phi + \sin\phi) + 6\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^1 \rho^2\,\mathrm{d}\rho \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 2\cos\phi + \sin\phi\,\mathrm{d}\phi}_{=[2\sin\phi - \cos\phi]_0^{2\pi} = 0} + \int_0^1 6\rho\,\mathrm{d}\rho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \\ &= 2\pi \cdot [3\rho^2]_0^1 = \underline{\underline{6\pi}}. \end{aligned}$$

Variante 2: Kartesische Koordinaten
Wir integrieren zuerst über z, dann über y, dann über x. Die Grenzen in diesem

Fall sind

$$\begin{aligned} &x \in [-2,2],\\ &y \in \left[-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}, \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right],\\ &z \in [0, x+y+3]. \end{aligned}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\int_0^{x+y+3} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} x+y+3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-2}^{2}\left[(3+x)y+\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\mathrm{d}x\\
&= \int_{-2}^{2}(3+x)\cdot 2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}+0\,\mathrm{d}x\\
\left.\begin{array}{r}\text{das zweite Integral ist Null,}\\ \text{weil der Integrand ungerade ist}\end{array}\right\} &= 6\int_{-2}^{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x + 2\int_{-2}^{2}x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x\\
\left.\begin{array}{r}\text{mit der Substitution}\\ x=2\sin u, \mathrm{d}x = 2\cos u\,\mathrm{d}u\end{array}\right\} &= 6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{(2\sin u)^2}{4}}\cos u\,\mathrm{d}u\\
&= 6\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,\mathrm{d}u\\
&= 6\left[\frac{1}{2}(\cos u\sin u+u)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{6\pi}}.
\end{aligned}$$

9. **(a)** **Variante 1**: Formel aus Vorlesung für Rotationskörper

Da das Dreieck symmetrisch ist bezüglich der y-Achse, betrachten wir nur die Punkte mit $x \geq 0$ und verdoppeln das Resultat. Wir suchen also das Trägheitsmoment des Rotationskörpers, der von dem Graphen von $y = 1-x$ (für $0 \leq x \leq 1$) erzeugt wird, wenn man ihn um die x-Achse rotiert. Gemäss der Formel aus der Vorlesung erhalten wir

$$\frac{1}{2}\Theta_x = \frac{1}{2}\pi\int_0^1 (1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{(1-x)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{10}.$$

Da wir nur den halben Körper betrachtet haben, ist $\Theta_x = \underline{\underline{\frac{\pi}{5}}}$.

Variante 2: Allgemeine Definition

Allgemein ist das Trägheitsmoment definiert als das Integral der quadrierten Abstände zur Drehachse ω (multipliziert mit der Dichte, die hier 1 ist). Folglich müssen wir das Integral

$$\Theta_\omega = \iiint_K r_{\perp,\omega}^2\,\mathrm{d}V$$

berechnen, wobei K, unser Rotationskörper, gegeben ist durch

$$K = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x\in[-1,1], \quad \begin{array}{l} x\geq 0 \Rightarrow y^2+z^2 \leq (-x+1)^2\\ x\leq 0 \Rightarrow y^2+z^2\leq (x+1)^2\end{array}\right\}.$$

Das Problem ist symmetrisch, und wir brauchen nur die Hälfte mit $x \geq 0$ zu betrachten. Der Abstand zur Drehachse (hier die x-Achse) ist gleich $r_{\perp,x} = \sqrt{y^2 + z^2}$, es bieten sich deshalb folgende Zylinderkoordinaten an:

$$\left.\begin{aligned} x &= x, \\ y &= \rho\cos\phi \\ z &= \rho\sin\phi, \end{aligned}\right\} \qquad \text{mit den Grenzen} \qquad \left\{\begin{aligned} &\rho \in [0, 1-x] \\ &\phi \in [0, 2\pi] \\ &x \in [0, 1]. \end{aligned}\right.$$

Diese Koordinaten haben Jacobi-Determinante ρ. Wir berechnen also $r_{\perp,x}^2 = \rho^2$, und damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Theta_x &= \iiint_{K,x\geq 0} r_{\perp,x}^2 \, \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-x} \rho^2 \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (1-x)^4 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{(1-x)^5}{5}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{10}, \qquad \text{folglich } \Theta_x = \underline{\underline{\frac{\pi}{5}}}. \end{aligned}$$

(b) Wir benutzen wieder die gleichen Koordinaten wie in **Variante 2** bei Teilaufgabe **(a)**. Das Problem ist weiterhin symmetrisch bezüglich der y-Achse. Diesmal ist der Abstand zur Drehachse durch $r_{\perp,y} = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + \rho^2 \sin^2\phi}$ gegeben, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Theta_y &= \iiint_{K,x\geq 0} r_{\perp,y}^2 \, \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-x} (x^2 + \rho^2 \sin^2\phi)\rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \cdot \int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}x + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\phi \, \mathrm{d}\phi}_{=\pi} \cdot \int_0^{1-x} \int_0^1 \rho^3 \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^1 x^2 \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x + \pi \int_0^1 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^1 x^2(1-x)^2 \, \mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\int_0^1 (1-x)^4 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4 \, \mathrm{d}x + \frac{\pi}{4}\left[-\frac{(1-x)^5}{5}\right]_0^1 \\ &= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 + \frac{\pi}{20} = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) = \pi \cdot \frac{5}{60} = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Lösung $\Theta_y = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$.

(c) Da das Problem symmetrisch ist bezüglich der x-Achse (um diese rotieren wir), sind alle Achsen senkrecht zur x-Achse gleichwertig. Insbesondere gilt

$$\Theta_z = \Theta_y = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}.$$

10. Variante 1: Gleichung für f herleiten und lösen

Wir berechnen die ersten beiden Ableitungen von G zu

$$G'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{2\int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t\right\} = 2f(x), \quad G''(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{2f(x)\right\} = 2f'(x).$$

Damit ist unsere Gleichung äquivalent zu

$$2f'(x) - 2f(x) = e^{2x},$$

also eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wir betrachten zuerst den *homogenen Teil*, d.h. die homogenisierte Gleichung $2f'(x) - 2f(x) = 0$. Diese ist separierbar und integrierbar zu

$$\frac{f'}{f} = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}f}{f} = \mathrm{d}x \quad\Longleftrightarrow\quad \int \frac{\mathrm{d}f}{f} = \int \mathrm{d}x \quad\Longleftrightarrow\quad \log f = x + \tilde{C};$$

folglich lautet die homogene Lösung $f_h(x) = Ce^x$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Für eine *partikuläre Lösung* können wir das Verfahren von Lagrange (Variation der Konstanten) anwenden, wir setzen also $f_p(x) = C(x)e^x$, wobei $C(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion sei. Ableiten ergibt $f_p'(x) = C'(x)e^x + C(x)e^x$, und eingesetzt in die ursprüngliche DGL finden wir

$$2f_p'(x) - 2f_p(x) = 2C'(x)e^x + 2C(x)e^x - 2C(x)e^x \stackrel{!}{=} e^{2x},$$

also

$$2C'(x)e^x = e^{2x} \quad\Longleftrightarrow\quad C'(x) = \tfrac{1}{2}e^x \quad\stackrel{2}{\Longleftarrow}\quad C(x) = \tfrac{1}{2}\int e^x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}e^x.$$

Damit ist also $f_p(x) = C(x)e^x = \frac{1}{2}e^{2x}$ eine partikuläre Lösung (wie man auch durch Einsetzen bestätigt).

Die *allgemeine Lösung* unser ursprünglichen Differentialgleichung ist die Summe der homogenen und der (d.h. einer beliebigen) partikulären Lösung, was uns zu

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = Ce^x + \tfrac{1}{2}e^{2x}$$

führt. Mit der zusätzlichen Bedingung $0 = f(0) = C + \frac{1}{2}$ finden wir $C = -\frac{1}{2}$ und damit die gesuchte Lösung

$$f(x) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}(e^{2x} - e^x)}}.$$

Variante 2: Gleichung für G lösen und f ausrechnen
Die Gleichung $G''(x) - G'(x) = e^{2x}$ ist eine inhomogene lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die homogenisierte Gleichung $G''(x) - G'(x) = 0$ können wir mit dem Exponentialansatz $G(x) = e^{\lambda x}$ lösen. Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 - \lambda = 0$, also $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 1$. Folglich ist $G_h(x) = C_1 + C_2e^x$ die homogene Lösung (hierbei sind $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten).

Für eine partikuläre Lösung versuchen wir den Ansatz $G_p(x) = Ce^{2x}$, da die rechte Seite auch so aussieht. Einsetzen ergibt

$$G_p''(x) - G_p'(x) = 4Ce^{2x} - 2Ce^{2x} \stackrel{!}{=} e^{2x},$$

also $2C = 1$ und damit $G_p(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Die allgemeine Lösung ist damit gegeben durch $G(x) = G_h(x) + G_p(x) = C_1 + C_2e^x + \frac{1}{2}e^{2x}$. Wie oben sind G und f über die Gleichung $G'(x) = 2f(x)$ verknüpft, also gilt

$$f(x) = \frac{1}{2}G'(x) = \frac{1}{2}\left(C_2e^x + e^{2x}\right) = \tfrac{1}{2}C_2e^x + \tfrac{1}{2}e^{2x}.$$

Mit der Anfangsbedingung $f(0) = 0$ erhalten wir wie oben die gesuchte Lösung $f(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(e^{2x} - 2^x)}}$.

[2]Hierbei lassen wir die Integrationskonstante weg, weil wir nur *eine* partikuläre Lösung brauchen.